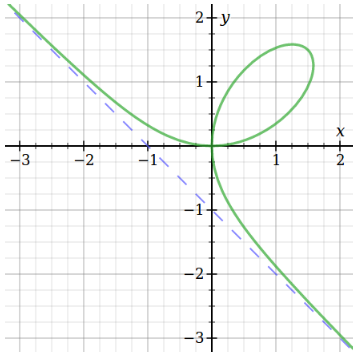
Álgebra, Combinatoria y Computación — Temas 3 y 4 — 29-5-2017

APELLIDOS **NOMBRE**

Ejercicio 1 (2,5 puntos). El *folium de Descartes* se puede parametrizar por

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Figura 1 Folium de Descartes



1) Encuentra la ecuación del folium. (**Nota:** Una base de Groebner del ideal $\langle t^3x - 3t + x, t^3y - 3t^2 + y, -ut^3 - u + 1\rangle \subset \mathbb{C}[u,t,x,y,z]$ es $G = \{u + 1/3ty - 1, t^2y - 3t + x, tx - y, ty^2 + x^2 - 3y, x^3 - 3xy + y^3\}$).
2) Tanto para $\mathbb{C}$ como para $\mathbb{R}$, comprobar que la parametrización anterior recorre toda la curva.

Ejercicio 2 (2,5 puntos). Supongamos que tenemos una familia de curvas en $\mathbb{R}^2$ determinadas por $F \in \mathbb{R}[x,y,t]$. Algunas de las curvas $\mathbf{V}(F_t)$ pueden tener puntos singulares mientras otras quizás no. En este ejercicio veremos que se pueden encontrar las curvas de la familia que tienen algina singularidad.

1) Considerando las ecuaciones $F = \frac{\partial}{\partial x}F = \frac{\partial}{\partial y}F = 0$ en $\mathbb{R}^3$ y usando teoría de eliminación, describir un procedimiento para determinar aquellos valores de t correspondientes a las curvas de la familia que tienen algún punto singular.
2) Aplicar el método anterior a las curvas de la familia dada por $F = xy - t \in \mathbb{R}[x,y,t]$.

Ejercicio 3 (2,5 puntos). Sea $G \subset \mathrm{GL}(n,k)$ un grupo finito de matrices. Probar que un polinomio $f \in k[x_1,\dots,x_n]$ es invariante para G si y sólo si sus componentes homogéneas lo son.

Ejercicio 4 (2,5 puntos). Sea $G \subset \mathrm{GL}(n,k)$ un grupo finito de matrices. Probar que el operador de Reynolds R_G tiene las siguientes propiedades:

1) Sean $a,b \in k$ y $f,g \in k[x_1,\dots,x_n]$ entonces $R_G(af+bg) = aR_G(f) + bR_G(g)$.
2) La aplicación R_G de $k[x_1,\dots,x_n]$ en $k[x_1,\dots,x_n]^G$ es sobreyectiva.
3) $R_G \circ R_G = R_G$.
4) Si $f \in k[x_1,\dots,x_n]^G$ y $g \in k[x_1,\dots,x_n]$, entonces $R_G(fg) = f \cdot R_G(g)$.