APELLIDOS NOMBRE

Ejercicio 1 (5 puntos). Supongamos que $f, g \in \mathbb{C}[x]$ son polinomios de grado positivo. El propósito de este ejercicio es construir un polinomio cuyas raíces sean la suma de una raíz de f más una raíz de g.

1) Probar que un número complejo $\gamma \in \mathbb{C}$ se puede escribir $\gamma = \alpha + \beta$, con $f(\alpha) = g(\beta) = 0$, si y solo si el sistema de ecuaciones $f(x) = g(y - x) = 0$ tiene solución con $y = \gamma$.
2) Demostrar que γ es raíz de $\mathrm{Res}(f(x), g(y - x), x)$ si y solo si $\gamma = \alpha + \beta$, con $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.
3) Usar lo anterior para construir un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Q}$ que tenga a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ como raíz.
4) Modificar la construcción anterior para crear un polinomio cuyas raíces sean todas las diferencias de una raíz de f menos una raíz de g.

Ejercicio 2 (5 puntos). El objetivo de este ejercicio es demostrar la identidad

$$0 = h_k(x_k, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_k, \ldots, x_n)\sigma_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Poniendo $\sigma_0 = 1$ la identidad se escribe más compacta

$$0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_k, \ldots, x_n)\sigma_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Si $S \subset \{1, \ldots, k-1\}$, notaremos por x^S al producto de las variables correspondientes y por $|S|$ al número de elementos de S.

1) Probar que
$$\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{S \subset \{1,\ldots,k-1\}} x^S \sigma_{i-|S|}(x_k, \ldots, x_n),$$
tomando $\sigma_j = 0$ si $j < 0$.
2) Probar que
$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_k, \ldots, x_n)\sigma_i(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{S \subset \{1,\ldots,k-1\}} x^S \left(\sum_{i=|S|}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_k, \ldots, x_n)\sigma_{i-|S|}(x_k, \ldots, x_n) \right). \end{aligned}$$
3) Usar la identidad $0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i h_{k-i}(x_1, \ldots, x_n)\sigma_i(x_1, \ldots, x_n)$ para concluir que la suma dentro de los paréntesis es cero para todo S. Esto termina la prueba de la identidad deseada.