APELLIDOS NOMBRE

Ejercicio 1 (5 puntos). Fijado un entero $1 < \ell < n$. Decimos que un orden monomial $>$ sobre $k[x_1, \dots, x_n]$ es de ℓ-eliminación si cualquier monomio en el que aparezca $x_1, \dots, x_\ell$ es mayor que todos los monomios de $k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$.

1) Si I es un ideal de $k[x_1, \dots, x_n]$ y G es una base de Groebner de I con respecto a un orden de ℓ-eliminación, probar que $G \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$ es una base de Groebner del ℓ-ésimo ideal de eliminación $I \cap k[x_{\ell+1}, \dots, x_n]$.
2) Sea el orden monomial $>_\ell$ definido como sigue: si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, entonces $\alpha >_\ell \beta$ si

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell > \beta_1 + \cdots + \beta_\ell, \text{ o } \alpha_1 + \cdots + \alpha_\ell = \beta_1 + \cdots + \beta_\ell \text{ y } \alpha >_{grevlex} \beta.$$

   Probar que $>_\ell$ es un orden de ℓ-eliminación.

Ejercicio 2 (5 puntos). En $\mathbb{R}^2$, consideremos las curvas definidas por las ecuaciones paramétricas

$$C_1 \colon \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2 + 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad C_2 \colon \begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2. \end{cases}$$

Se pide:

1) Probar que $C_1 = V(x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1)$. (Indicación: $G_1 = \{t^2 - y + 1, tx - y^2 + 2y - 1, ty - t - x, x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1\}$ es una base de Groebner de $I = \langle x - t^3, y - t^2 - 1\rangle$ para el orden lexicográfico con $t > x > y$).
2) Probar que $C_2 = V(x^2 - 2x - y^3 + 1)$. (Indicación: $G_2 = \{t^2 - y, tx - t - y^2, ty - x + 1, x^2 - 2x - y^3 + 1\}$ es una base de Groebner de $J = \langle x - t^3 - 1, y - t^2\rangle$ para el orden lexicográfico con $t > x > y$).
3) Encontrar los puntos racionales de $C_1 \cap C_2$. (Indicación: $G = \{2x + 3y^2 - 3y, 9y^4 - 22y^3 + 21y^2 - 12y + 4\}$ es una base de Groebner del ideal $K = \langle x^2 - y^3 + 3y^2 - 3y + 1, x^2 - 2x - y^3 + 1\rangle$ para el orden lexicográfico con $x > y$).