Ejercicio 1. Orden lexicográfico inverso graduado: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Diremos que $\alpha >_{lexinvgr} \beta$ si $|\alpha| > |\beta|$, o $|\alpha| = |\beta|$ y, en $\alpha - \beta$, el entero no nulo más a la derecha es negativo. Probar que *lexinvgr* es un orden monomial.

Ejercicio 2. Calcular el resto de la división del polinomio f respecto del conjunto F. Usar el orden lexicográfico y el lexicográfico inverso graduado.
(a) $f = x^7y^2 + x^3y^2 - y + 1$, $F = (xy^2 - x, x - y^3)$.
(b) $f = xy^2z^2 + xy - yz$, $F = (x - y^2, y - z^3, z^2 - 1)$

Ejercicio 3. Sea $G = \{x - z^2, y - z^3\}$. ¿Es G una base de Groebner del ideal $\langle G\rangle$ respecto del orden lexicográfico graduado? Razonar la respuesta y, en caso negativo, hallar una.

Ejercicio 4. En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^2y + z, xz + y\rangle$. Se pide:
1) Hallar una base de Groebner del ideal I para el orden lexicográfico con $x < y < z$.
2) ¿Es $G = \{x^2y+z, xz+y, yz-y\}$ una base de Groebner de I para el orden lexicográfico graduado con $x > y > z$?

Ejercicio 5. Sea $k = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_5$ y consideremos el anillo $k[x, y]$. Hallar la base de Groebner reducida del ideal $I = \langle x^2 + y^2 + 1, x^2y + 2xy + x\rangle$ para el orden lexicográfico con $x > y$.

Ejercicio 6. En el anillo $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - 2xy, 2y^2 - x, x^2\rangle$. Hallar la base de Grobner reducida del ideal I para el orden lexicográfico graduado.

Ejercicio 7. En $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - 2xy, x^2y - 2y^2 + x\rangle$. Hallar una base de Groebner de I para el orden lexicográfico graduado.

Ejercicio 8. En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^2 - xy - x, xz + y^2, y^2 + yz\rangle$. Hallar una base de Groebner del ideal I para el orden lexicográfico. Obtener a partir de ella una base minimal y la base reducida.

Ejercicio 9. En $\mathbb{Q}[x, y, z]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 - y, x^2y - z\rangle$. Hallar una base de Gröbner del ideal I para el orden lexicográfico.

Ejercicio 10. En el anillo $\mathbb{Q}[x, y]$ se considera el ideal $I = \langle x^3 + xy + y^2, xy - 1\rangle$. Comprobar si el polinomio $f = x^2y + y^3 + x^2 - x + y$ pertenece al ideal I (Indicación: usar el orden graduado lexicográfico)

Ejercicio 11. Determinar si el polinomio $y(y^2 - z^4)$ pertenece al ideal $I = \langle xz - y,\ xy + yz\rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$.

Ejercicio 12. En el anillo $\mathbb{R}[x, y]$, sea $<$ el orden monomial lexicográfico con $x > y$. Consideremos los polinomios $f_1 = x^2y + 1$, $f_2 = y^2 - 1$, $f = x^4y^2 - y^2$, y sea $I = \langle f_1, f_2\rangle$.
(a) Sean las listas ordenadas $A = (f_1, f_2)$ y $B = (f_2, f_1)$. Calcular los restos $\overline{f}^A$ y $\overline{f}^B$.
(b) Determinar a partir del apartado anterior, y sin hacer ningún cálculo, si $\{f_1, f_2\}$ es una base de Groebner de I.
(c) Determinar si el polinomio $x + y$ pertenece a I.