APELLIDOS **NOMBRE**

Observaciones:

-) Todos los ejercicios tienen el mismo valor. Cada ejercicio será puntuado sobre 10 para después calcular la nota global, según se presente a un parcial o a los dos.

-) Los dos primeros ejercicios corresponden al primer parcial y los dos últimos al segundo.

-) Si tienen los dos parciales suspensos, deberá realizar los 4 ejercicios y la nota final será la obtenida en este examen.

-) Si tiene un solo parcial suspenso, deberá realizar los 2 ejercicios correspondientes a dicho parcial. Podrá también realizar los otros 2 ejercicios para mejorar la nota del parcial aprobado. Para superar la asignatura deberá aprobar el parcial suspenso (los 2 ejercicios que le correspondan), o bien aprobar el examen completo (los 4 ejercicios). En este caso, la nota final será la mejor entre la media de las notas de cada uno de los parciales, en caso de que se hubieran aprobado separadamente, y la nota global (con los 4 ejercicios) de este examen, en caso de que se hubieran realizado los 4 ejercicios.

-) Para superar este examen habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados.

Ejercicio 1.

(1) (2 pts.) Definir los siguientes objetos (de forma concisa):

(a) Dada una aplicación $f\colon X \to Y$ y un subconjunto $B \subset Y$, se define $f^{-1}(B)$ como:

(b) Dada una aplicación $f\colon X \to Y$ decimos que f es inyectiva cuando:

(c) Dado un conjunto X se define el conjunto partes de X, notado $\mathscr{P}(X)$ como:

(d) Una correspondencia en un conjunto X es:

(2) (4 pts.) Sea X un conjunto, sean $A, B \subset X$ subconjuntos.

(a) Demostrar que $(X \setminus A) \cap B = X \setminus (A \cup (X \setminus B))$.

(b) Sea una aplicación $f : X \longrightarrow Y$. Demostrar que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Probar con un contraejemplo que en general no es cierta la igualdad, y demostrar que sin embargo se tiene la igualdad cuando f es inyectiva.

(3) (4 pts.) Sea X un conjunto, consideramos el conjunto $\mathbb{Z}^X$ de aplicaciones de X en $\mathbb{Z}$. Definir una relación de equivalencia, $\sim$, sobre $\mathbb{Z}^X$ de tal forma que exista una biyección entre $\mathbb{Z}^X/\sim$ y $\mathscr{P}(X)$. **Idea:** Se sugiere considerar la aplicación $\varphi\colon \mathbb{Z}^X \longrightarrow \mathscr{P}(X)$ que envía $f \in \mathbb{Z}^X$ en $f^{-1}(\{0\})$.

Ejercicio 2. (Cada apartado vale 2 puntos) Se pide lo siguiente:

(1) Dar ejemplos de subgrupos de S_5 que tengan orden 2, 3, 4 y 5.

(2) ¿Tiene S_5 algún subgrupo de orden 6 que sea abeliano? ¿Y no abeliano? ¿Tiene S_5 algún elemento de orden 10? Razonar las respuestas.

(3) Probar que el subconjunto de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ siguiente

$$\mathscr{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R}) \mid a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ (cuya operación es el producto de matrices). Encontrar elementos de $\mathscr{M}$ que tengan orden 2 y orden 4.

(4) Sea $f : G \longrightarrow H$ un homorfismo de grupos (notados multiplicativamente). Dado un subgrupo $K \subset H$, probar que $f^{-1}(K)$ es un subgrupo de G. Probar que si $K \lhd H$, entonces $f^{-1}(K) \lhd G$.

(5) En las condiciones del apartado anterior, probar que si $f : G \longrightarrow H$ es sobreyectivo y $K \lhd H$, entonces $G/f^{-1}(K) \simeq H/K$ (**Indicación:** se puede utilizar la factorización canónica de un homomorfismo de grupos).

APELLIDOS **NOMBRE**

Observaciones:

-) Todos los ejercicios tienen el mismo valor. Cada ejercicio será puntuado sobre 10 para después calcular la nota global, según se presente a un parcial o a los dos.
-) Los dos primeros ejercicios corresponden al primer parcial y los dos últimos al segundo.
-) Si tiene los dos parciales suspensos, deberá realizar los 4 ejercicios y la nota final será la obtenida en este examen.
-) Si tiene un solo parcial suspenso, deberá realizar los 2 ejercicios correspondientes a dicho parcial. Podrá también realizar los otros 2 ejercicios para mejorar la nota del parcial aprobado. Para superar la asignatura deberá aprobar el parcial suspenso (los 2 ejercicios que le correspondan), o bien aprobar el examen completo (los 4 ejercicios). En este caso, la nota final será la mejor entre la media de las notas de cada uno de los parciales, en caso de que se hubieran aprobado separadamente, y la nota global (con los 4 ejercicios) de este examen, en caso de que se hubieran realizado los 4 ejercicios.
-) Para superar este examen habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados.

Ejercicio 3.

(1) (1 pt.) En un cuerpo de 49 elementos, ¿qué orden tiene el grupo de las unidades?
(2) (2 pts.) ¿Existe alguna potencia de 17 que sea consecutiva a un múltiplo de 200? En caso afirmativo, hallar un exponente de 17 que lo cumpla.
(3) (1 pt.) ¿Existe alguna potencia de 6 que sea consecutiva a un múltiplo de 99? En caso afirmativo, hallar un exponente de 6 que lo cumpla.
(4) (2 pts.) ¿Cuántas soluciones tiene, en el anillo $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}390$ la ecuación $19x \equiv 2$? Hallarlas todas.
(5) (4 pts.) Sea $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \quad a, b \in \mathbb{Q} \right\}$, con la suma y el producto usuales de matrices.

a) Demuestra que D es un subanillo conmutativo del anillo M de las matrices 2×2 con entradas en $\mathbb{Q}$.

b) ¿Es D un cuerpo? ¿Es D un dominio de integridad?

c) Sea I el ideal principal generado por la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que el anillo D/I es isomorfo a $\mathbb{Q}$. (**Nota:** Utilizar el homomorfismo $f : D \to \mathbb{Q}$ que envía $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ en a.)

d) Demostrar que I es un ideal maximal en D.

Ejercicio 4.

(1) (4 pts.) Sea k un cuerpo y sea $m(x) \in k[x]$. Se pide:

(a) Probar que un polinomio $f(x) \in k[x]$ posee un inverso multiplicativo módulo $m(x)$ si y sólo si $\mathrm{mcd}(f(x), m(x)) = 1$.

(b) Probar que $m(x)$ es irreducible en $k[x]$ si y sólo si el ideal $(m(x))$ es maximal en $k[x]$.

(2) (3 pts.) Sea el polinomio $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$, sea el ideal $I = (f(x)) \subset \mathbb{Q}[x]$ y sea $A = \mathbb{Q}[x]/I$ el correspondiente anillo cociente. Se pide:

(a) ¿Es el anillo A un cuerpo?

(b) Probar que para todo $a \in \mathbb{Q}$ el elemento $(x - a) + I$ es una unidad en A.

(c) Si existe, dar razonadamente un ejemplo de un polinomio $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que $g(x) + I$ no sea una unidad en A.

(3) (3 pts.) Utilizar el algoritmo de Berlekamp para descomponer el polinomio $f(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ como producto de factores irreducibles.

"Me gustan los polinomios, pero sólo hasta cierto grado"
Anónimo