APELLIDOS NOMBRE

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 30 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos.

Ejercicio 1. (10 puntos) De los 3 apartados siguientes, **contestar al primero y elegir uno de entre los otros dos**:

1. (6 puntos) Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y H' un subgrupo normal de G'. Probar que $f^{-1}(H')$ es un subgrupo normal de G. Probar que hay un homomorfismo natural inyectivo $G/f^{-1}(H') \hookrightarrow G'/H'$.

2. (4 puntos, **a elegir**) Sea A un anillo e $I \subset A$ un ideal. Probar que I es un ideal primo si y sólo si A/I es un dominio de integridad.

3. (4 puntos, **a elegir**) Enunciar y probar el Lema de Gauss.

Ejercicio 2. (10 puntos) Se pide lo siguiente:

1. (5 puntos) Sea $N > 1$ un número natural fijo. Discutir, dependiendo de N, si el siguiente sistema de congruencias tiene soluciones o no, y cuando las tenga, calcularlas:

$$\begin{array}{rcll} x & \equiv & 6 & \pmod{N} \\ x & \equiv & 7 & \pmod{N+1}. \end{array}$$

1. (5 puntos) Calcular el resto de la división euclídea de $8^{23^{61}}$ al dividirlo por 27.

Ejercicio 3. (10 puntos) Se pide lo siguiente:

1. (3 puntos) Consideremos el polinomio $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$ y el anillo cociente $A = \mathbb{Q}[x]/\langle f(x)\rangle$. ¿Por qué la clase de x en A es una unidad? Calcular su inverso (en A). Dar un divisor de 0 concreto y no nulo de A.

2. (3 puntos) Sea $p > 0$ un primo fijo. Para cada entero $d \geq 2$ dar un ejemplo de un polinomio de grado d mónico $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ que sea irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y para el que su reducción módulo p no sea irreducible en $\mathbb{F}_p[x]$.

3. (2 puntos) Sea $p > 0$ un primo y $h(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ un polinomio irreducible de grado $d \geq 2$. ¿Es $K = \mathbb{F}_p[x]/\langle h(x)\rangle$ un cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene K? ¿Cúal es el orden del grupo de las unidades de K?

4. (2 puntos) Siguiendo con las condiciones del apartado 3., si $q(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ es un polinomio no divisible por $h(x)$, ¿se tiene que $h(x)$ divide a $q(x)^{p^d-1} - 1$?