Ejercicios de Álgebra Básica. Curso 2017/18

Tema 2: Introducción a la teoría de grupos

Introducción

Ejercicio 1.– Probar que $\mathbb{Z}$ con la operación $a \star b = a + b + 1$ es un grupo.

Ejercicio 2.– En $\mathbb{Z}$ consideramos la operación interna $a \star b = ab + a$. ¿Es $(\mathbb{Z}, \star)$ un grupo? ¿Es abeliano?

Ejercicio 3.– Probar que $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ con la operación $a \star b = a + b - ab$ es un grupo.

Ejercicio 4.– Sea $(G, \cdot)$ un grupo, $x \in G$ y definamos una nueva operación $\star$ sobre G dada por $a \star b = a \cdot x \cdot b$ para todo $a, b \in G$. Probar que G con la operación $\star$ es un grupo.

Ejercicio 5.– Probar que $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ es un grupo con la operación definida por

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + b).$$

¿Es abeliano?

Ejercicio 6.– Sea X un conjunto, $G = \mathcal{P}(X)$. Determinar cuándo $(G, \circ)$ es un grupo, en cada uno de los siguientes casos:

(1) $A \circ B = A \cup B$.

(2) $A \circ B = A \cap B$.

(3) $A \circ B = A \setminus B$.

Ejercicio 7.– Sea $(G, \cdot)$ un grupo y X un conjunto. Probar que el conjunto potencia G^X es un grupo, con la operación $\star$ dada por $(f \star g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, para todo $x \in X$.

Ejercicio 8.– Sea G un grupo. Probar que son equivalentes:

(1) G es abeliano.

(2) $(ab)^2 = a^2 b^2$, para cualesquiera $a, b \in G$.

(3) $b^{-1}a^{-1}ba = 1$, para cualesquiera $a, b \in G$.

Ejercicio 9.– Sea G un grupo tal que todo elemento distinto del elemento neutro tiene orden 2. Demostrar que G es abeliano.

Ciclos y Trasposiciones. El grupo S_n

Ejercicio 10.– Consideremos en S_7 la permutación

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular la descomposición en ciclos disjuntos de $\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}$. Calcular el orden de $\sigma, \sigma^2, \sigma^{-1}$.

Ejercicio 11.– Dadas las siguientes permutaciones de S_7

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix},\ \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

se pide:

(1) Hallar todos los posibles productos de dos σ_i (distintas entre sí).

(2) Descomponer las permutaciones σ_i y las halladas en (1) como producto de ciclos disjuntos.

(3) Hallar las inversas de las permutaciones σ_i y de las halladas en (1).

(4) Descomponer las permutaciones σ_i y las halladas en (1) como producto de trasposiciones.

(5) Hallar los índices de las permutaciones σ_i y de las halladas en (1).

Ejercicio 12.–

(1) Sean, en S_n, una permutación σ y un ciclo $(a_1\ a_2 \dots a_r)$. Probar que

$$\sigma \circ (a_1\ a_2 \dots a_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\ \sigma(a_2) \dots \sigma(a_r)).$$

(2) Hallar una permutación $\sigma \in S_4$ tal que $\sigma \circ (1\ 2\ 3) \circ \sigma^{-1} = (1\ 2\ 4)$. ¿Es σ única?

(3) Hallar una permutación $\sigma \in S_5$ tal que $\sigma \circ (1\ 2)(3\ 4\ 5) \circ \sigma^{-1} = (2\ 3)(1\ 5\ 4)$.

Ejercicio 13.–

(1) Demostrar que dos permutaciones de S_n son conjugadas si y sólo si las longitudes de sus ciclos, en sus descomposiciones como productos de ciclos disjuntos, coinciden.

(2) ¿Son conjugadas las permutaciones $\tau_1 = (1\ 2)$ y $\tau_2 = (1\ 2\ 3)$ en S_3? En caso afirmativo, hallar $\sigma \in S_3$ tal que $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2$.

(3) ¿Son conjugadas las permutaciones $\tau_1 = (1\ 2)(3\ 4)$ y $\tau_2 = (1\ 3)(2\ 5)$ en S_5? En caso afirmativo, hallar $\sigma \in S_5$ tal que $\sigma\tau_1\sigma^{-1} = \tau_2$.

(4) "Ser conjugados" es una relación de equivalencia en un grupo G, y en este caso las clases de equivalencia se llaman *clases de conjugación*. ¿Cuántas clases de conjugación hay en S_3? ¿Y en S_4?

Ejercicio 14.– Sea $n \geq 3$.

(1) Calcular $(1\ i)(1\ j)(1\ i)$; $(i-1\ i)(1\ i-1)(i-1\ i)$ e $(1\ 2\ \dots n)(i-1\ i)(1\ 2\ \dots n)^{-1}$, siendo $2 \leq i, j \leq n$ distintos.

(2) Demostrar que toda permutación de S_n se puede poner como producto de las trasposiciones $(1\ i)$, con $i = 2, \dots, n$.

(3) Probar que toda permutación de S_n es producto de las trasposiciones $(i-1\ i)$, con $i = 2, \dots, n$.

(4) Demostrar que toda permutación de S_n se puede poner como producto de las dos permutaciones $(1\ 2\ \dots n)$ y $(1\ 2)$.

Ejercicio 15.– Demostrar que los únicos elementos de S_n de orden un primo p son los productos de p-ciclos disjuntos.

Ejercicio 16.– Demostrar que un k-ciclo distinto de la identidad es una permutación par si y sólo si k es impar.

Ejercicio 17.– En S_6 sean las permutaciones

$$\sigma\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \tau\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcular las permutaciones σ^{-1}, $\sigma\tau$ y $\sigma\tau\sigma^{-1}$. Determinar el signo de las permutaciones anteriores.

Ejercicio 18.– Demuestrar que $\operatorname{signo}(\sigma\tau\sigma^{-1}) = \operatorname{signo}(\tau)$ para cualesquiera $\sigma, \tau \in S_n$.

Subgrupos. Teorema de Lagrange

Ejercicio 19.– Sea $V \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ el conjunto

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Probar que V es un subgrupo (multiplicativo) de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Ejercicio 20.– Sea $n \geq 3$.

(1) Comprobar que $(i\ j)(j\ k) = (i\ j\ k)$, $(i\ j)(k\ l) = (i\ j\ k)(j\ k\ l)$, $(i\ j\ k) = (1\ i\ j)(1\ j\ k)$, $(1\ i\ j) = (1\ 2\ j)(1\ 2\ i)^2$, con todos los índices i, j, k, l distintos.

(2) Probar que toda permutación de A_n se puede expresar como producto de 3-ciclos.

(3) Probar que toda permutación de A_n se puede expresar como producto de las permutaciones $(1\ 2\ i)$, con $i = 3, \ldots, n$.

Ejercicio 21.– Sea $(G, *)$ un grupo finito. Demostrar que un subconjunto $H \subset G$ no vacío es un subgrupo si y sólo si la operación $*$ es interna en H.

Nota: En el plano euclídeo se llaman movimientos a las aplicaciones del plano que conservan la distancia entre puntos. Dada una figura del plano, el conjunto de los movimientos que la dejan invariante (que la transforman en la misma figura) es un grupo llamado *grupo de simetría*. La operación en este grupo es la composición de aplicaciones.

Ejercicio 22.–

(1) Si G es el grupo de simetrías del triángulo equilátero, observe que los elementos de G permutan los vértices del triángulo, y por tanto se puede ver a G como un subgrupo de S_3. ¿De qué subgrupo se trata?

(2) Hallar el subgrupo de S_4 (y de S_5 y de S_6, respectivamente) que corresponde al grupo de simetrías de un cuadrado (y de un pentágono regular y de un hexágono regular, respectivamente).

Ejercicio 23.– Demostrar que el subgrupo de S_5, $H = \langle (12345), (25)(34) \rangle$, tiene 10 elementos y corresponde al grupo de simetrías del pentágono regular.

Ejercicio 24.– Demostrar que el subgrupo de S_6, $H = \langle (123456), (26)(35) \rangle$, tiene 12 elementos y corresponde al grupo de simetrías del hexágono regular.

Ejercicio 25.– En S_n consideremos las permutaciones $\sigma = (12\cdots n)$ y

$$\tau\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que el subgrupo $H = \langle \sigma, \tau \rangle$ tiene $2n$ elementos y corresponde al grupo de simetrías del polígono regular de n lados.

Nota: El grupo de simetrías del polígono regular de n lados se denomina *grupo diédrico de orden* $2n$ y se denota por D_n.

Ejercicio 26.– Calcular todos los elementos de D_n que dejan invariante a un vértice dado del polígono regular de n lados. ¿Es un subgrupo?

Homomorfismos de grupos

Ejercicio 27.– Sea p un número primo. Probar que todo grupo de orden p es cíclico. Deducir que dos grupos de orden p son siempre isomorfos.

Ejercicio 28.– ¿Cuál es el mínimo valor que debe tener n para que existan dos grupos distintos (es decir, no isomorfos) con n elementos?

Ejercicio 29.– Sea $f : G \to H$ un homomorfismo inyectivo de grupos, con G y H finitos. Probar que $|G|$ divide a $|F|$.

Ejercicio 30.– Sea $f\colon G \to H$ un homomorfismo de grupos, y sea $A \subset G$ un subgrupo. Demostrar que $f(A)$ es un subgrupo de H.

Ejercicio 31.– Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la aplicación dada por $f(x) = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$. Probar que f es un homomorfismo de grupos y calcular su núcleo e imagen.
Nota: Recordemos que $\forall x, y \in R$ se tiene:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \mathrm{sen}(x)\mathrm{sen}(y)$$

$$\mathrm{sen}(x+y) = \mathrm{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\mathrm{sen}(y)$$

Ejercicio 32.– Estudiar cuántos homomorfismos existen:

(1) De $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$.

(2) De $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}12$, de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}9$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}3$, de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$, y de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}8$.

(3) De $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$.

(4) De $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m$.

Ejercicio 33.– Probar que los siguientes grupos son isomorfos:

(1) $(\mathbb{Z}, +)$ y $(\mathbb{Z}5, +)$.

(2) $(\mathbb{R}^4, +)$ y $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.

(3) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ y $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$, con $x \star y = x + y + xy$.

Ejercicio 34.– Sea el conjunto

$$G = \left\{ f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \neq 0 \right\},$$

donde $f_{a,b}(x) = ax + b$. Se pide:

(1) Probar que G es un grupo con la composición de aplicaciones.

(2) Probar que la aplicación $F : G \longrightarrow G$ dada por $F(f_{a,b}) = f_{a,0}$ es un homomorfismo de grupos. Hallar el núcleo y la imagen del homomorfismo F.

Ejercicio 35.– Un automorfismo es un isomorfismo de un grupo en sí mismo. Probar que el conjunto de los automorfismos de $\mathbb{Z}$, $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, es un grupo isomorfo a $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2$.

Ejercicio 36.– Sea G un grupo. Probar que las aplicaciones definidas por

$$\begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^{2} \end{array}$$

son homomorfismos de grupos si y sólo si G es abeliano.

Subgrupos normales. Grupo cociente

Ejercicio 37.– Sea G un grupo. Probar que la intersección de subgrupos normales de G es un subgrupo normal de G.

Ejercicio 38.– Sea G un grupo y d un entero positivo. Supongamos que G posee un único subgrupo H de orden d. Demostrar que H es normal.

Ejercicio 39.– Se consideran los conjuntos G y H de matrices:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

(las matrices de G se llaman *matrices de Heisenberg*). Se pide:

(1) Demostrar que G, con la multiplicación de matrices, es un grupo. ¿Es abeliano? ¿Es cíclico?

(2) ¿Es el conjunto H un subgrupo de G? En caso afirmativo, ¿es normal en G?

(3) Sea $f : G \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por $f\left(\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = a + c$. Probar que f es homomorfismo y calcular su núcleo e imagen.

Ejercicio 40.– Dado un grupo G, se define el centro de G como sigue:

$$C(G) = \{x \in G \mid xy = yx \text{ para todo } y \in G\}.$$

Probar que $C(G)$ es un subgrupo normal de G. Si H es un subgrupo de $C(G)$, probar que H es normal en G.

Ejercicio 41.– Consideremos los siguientes subgrupos de S_4:

$$C_2 = \{(),\ (1\ 2)(3\ 4)\}, \qquad V_4 = \{(),\ (1\ 2)(3\ 4),\ (1\ 3)(2\ 4),\ (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

(1) Probar que C_2 es normal en V_4.

(2) Probar que V_4 es normal en S_4.

(3) Probar que C_2 no es normal en S_4.

Nota: El ejercicio anterior demuestra que la relación "ser normal en", no es transitiva.

Ejercicio 42.– Sea H un subgrupo normal de orden 2 de un grupo G. Probar que $H \subset C(G)$.

Ejercicio 43.– Sea G un grupo y H un subgrupo normal de orden 2 tal que G/H es cíclico. Probar que G es abeliano. Si $G = S_3$ y $H = \langle (12) \rangle$, ¿cuáles de las condiciones anteriores se verifican?

Ejercicio 44.– Si H es un subgrupo de G de índice 2, probar que H es normal en G.

Ejercicio 45.– Sea H un subgrupo cíclico finito de G, supongamos que H es un subgrupo normal de G. Sea $K = \langle y \rangle$ un subgrupo propio de H.

(1) Probar que si $x \in G$, entonces $o(y) = o(x^{-1}yx)$.

(2) Probar que si $x \in G$, entonces $\langle x^{-1}yx \rangle = K$.

(3) Deducir que K es un subgrupo normal en G.

Ejercicio 46.– Sea G un grupo finito, y sea $K \subset G$ un subgrupo normal. Probar que $|G/K|$ divide a $|G|$.

Ejercicio 47.– Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, con G finito. Probar que $|\mathrm{Im}(f)|$ divide a $|G|$.

Ejercicio 48.– Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos, y S un subgrupo de H. Probar:

(1) $f^{-1}(S)$ es subgrupo de G.

(2) $\ker(f) \subset f^{-1}(S)$.

(3) Si S es normal en H entonces $f^{-1}(S)$ es normal en G.

(4) Si S_0 es un subgrupo de G tal que $\ker(f) \subset S_0$ y $f(S_0) = S$ entonces $S_0 = f^{-1}(S)$.

Ejercicio 49.– Encontrar todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2)^3$, indicando los que son normales y hallando los cocientes, en esos casos.

Ejercicio 50.– (Teorema de Cayley) Encontrar un subgrupo de permutaciones que sea isomorfo a cada uno de los grupos que aparecen en los ejercicios 19, 39 y 49.