Ejercicios de Álgebra Básica. Curso 2017/18

Tema 1: Conjuntos

Conjuntos. Operaciones básicas

Ejercicio 1.– Describir las relaciones de inclusión o pertenencia entre los siguientes conjuntos:

$$A = \emptyset,\ B = \{\emptyset\},\ C = \{a, b\},\ D = \{\{a\}, b\},\ E = \{a\},\ F = \{\{a\}\}.$$

Ejercicio 2.– (En este ejercicio todos los conjuntos considerados serán subconjuntos de un conjunto fijo U y dado $A \subset U$, $\overline{A} := U \setminus A$). Probar:

(1). $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

(2). Si $A \subset B$ entonces $\overline{B} \subset \overline{A}$.

(3). Si $A \subset C$ y $B \subset C$ entonces $A \cup B \subset C$.

(4). Si $C \subset A$ y $C \subset B$ entonces $C \subset A \cap B$.

(5). Si $A \subset B$ y $C \subset D$ entonces $A \cap C \subset B \cap D$ y $A \cup C \subset B \cup D$.

(6). $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $A \subset \overline{B}$.

Ejercicio 3.– Dados tres conjuntos A, B, C:

(1). Suponiendo que $A \subset C$, probar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

(2). ¿Es cierto en general que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$? Probarlo o dar un contraejemplo.

Ejercicio 4.– Sean A, B, C conjuntos. Probar:

(1). $A \setminus B \subset A$.

(2). $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$.

(3). $A \setminus B = \emptyset$ si y sólo si $A \subset B$.

(4). $B \setminus (B \setminus A) = A$ si y sólo si $A \subset B$.

(5). Si $A \subset B$, entonces $A \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

(6). Si $A \subset B$, entonces $C \setminus B \subset C \setminus A$.

Ejercicio 5.– Sean A, B, C tres conjuntos.

(1). Suponiendo que $A \cap C = \emptyset$, probar que $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$.

(2). ¿Es cierto en general que $(A \cup B) \backslash C = A \cup (B \backslash C)$? Probarlo o dar un contraejemplo.

Ejercicio 6.– Sea X un conjunto. Denotaremos por $\mathscr{P}(X)$ al conjunto formado por todos los subconjuntos de X. A $\mathscr{P}(X)$ lo denominaremos el conjunto de las partes de X. Dar $\mathscr{P}(X)$, especificando todos sus elementos, en cada uno de los casos siguientes:

(1). $X = \{1, 2\}$.

(2). $X = \{a, b, c\}$.

(3). $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 7.– Probar que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$.

Producto cartesiano. Correspondencias. Aplicaciones

Ejercicio 8.– Sean A, B, C, D conjuntos. Probar que:

(1). Si $A \subset B$ y $C \subset D$, entonces $A \times C \subset B \times D$.

(2). $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Idem para $\cap$.

(3). $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$. Idem para $\cap$.

(4). $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

Ejercicio 9.– Sean A, B, C conjuntos. Probar:

(1). $A \subset C$ si y sólo si $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

(2). $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

(3). $(A \cup C) \setminus B = (A \setminus B) \cup (C \setminus B)$.

Ejercicio 10.– Probar que dados tres conjuntos A, B y C se tiene que:

$$(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C).$$

Ejercicio 11.– Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

(1). Dar ejemplos de correspondencias (no aplicaciones) entre A y B y entre B y A.

(2). Dar ejemplos de aplicaciones entre A y B y entre B y A.

(3). Si es posible, dar ejemplos de aplicaciones inyectivas entre A y B y entre B y A.

(4). Si es posible, dar ejemplos de aplicaciones sobreyectivas entre A y B y entre B y A.

Ejercicio 12.– Decir cuales de las siguientes correspondencias son aplicaciones:

(1). $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y^2 = x\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.

(2). $f = \{(p/q, q) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z} \mid p/q \text{ es una fracción irreducible}\} \subset \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z}$.

(3). $f = \{(x, x^2 - 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(4). $f = \{(x, 3x + 1) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Estudiar la inyectividad y sobreyectividad de las aplicaciones anteriores.

Ejercicio 13.– Sean las aplicaciones

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x+1)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & +\sqrt{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - x \end{array}$$

Calcular todas las composiciones posibles de las aplicaciones anteriores.

Ejercicio 14.– Sean $f \colon X \to Y$ y $g \colon Y \to Z$ dos aplicaciones.

(1). Probar que si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

(2). Probar que si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

(3). Si $g \circ f$ es sobreyectiva, probar que g es sobreyectiva.

(4). Si $g \circ f$ es inyectiva, probar que f es inyectiva.

Ejercicio 15.– Sea $f\colon X \to Y$, con $X \neq \emptyset$, una aplicación. Demostrar que

(1). f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g\colon Y \to X$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_X$ (esto se conoce como una inversa a izquierda).

(2). f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h\colon Y \to X$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ (esto se conoce como una inversa a derecha).

Ejercicio 16.– Sean $f : A \to B$ una aplicación, y $A_1 \subset A_2 \subset A, B_1 \subset B_2 \subset B$ conjuntos. Probar que:

(1). $f(A_1) \subset f(A_2)$.

(2). $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

(3). $f(A_1) \subset B_1$ si y sólo si $A_1 \subset f^{-1}(B_1)$.

Ejercicio 17.– Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la aplicación definida por $f(x) = x^2 + x - 2$. Consideremos los conjuntos $A = \{1, -1, 0, 2\}, B = \{0, -2\}$. Calcular $f(A)$ y $f^{-1}(B)$.

Ejercicio 18.– Sean $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ dos aplicaciones, $C \subset Z$. Probar que $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Ejercicio 19.– Sea $f : X \to Y$ una aplicación, $A, B \subset X$ y $C, D \subset Y$. Se pide:

(1). Probar que $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$. Demostrar con un ejemplo que la contención contraria no es cierta en general. Determinar una condición que deba cumplir f para que la igualdad $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$ sea cierta para todo $A, B \subset X$.

(2). Probar que $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Ejercicio 20.– Determinar una condición que deba cumplir una aplicación $f : X \to Y$ para que se cumpla

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

para todos $A, B \subset X$. ¿Es necesaria dicha condición?

Ejercicio 21.– Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la aplicación

$$f(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Calcular las restricciones de f a los números pares y a los números impares.

Ejercicio 22.– Sea $f\colon X \to Y$ una aplicación, y sean $A \subset X$ y $B \subset Y$.

(1). Si f es inyectiva, probar que $A = f^{-1}\big(f(A)\big)$.

(2). Si f es sobreyectiva, probar que $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

Ejercicio 23.– Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por $f(x, y) = x + y$.

(1). Si $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ es el eje x, calcular $f(A)$.

(2). Hallar $f^{-1}([0, 1])$, donde $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq x \leq 1\}$.

(3). ¿Existe algún subconjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ tal que $f_{|B}$ sea biyectiva? En caso afirmativo, hallar su inversa.

(4). Dada $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - x + 1$, calcular $g^{-1}((0,1))$.

Ejercicio 24.– Sea $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ la aplicación dada por $f(a,b) = a \cdot b$.

(1). Sea $A = \{1,3\} \times \{1,2\} \subset \mathbb{Z}^2$. Dé *todos* los elementos de A. Calcule $f(A)$.

(2). Sea $B = \{0,2\} \subset \mathbb{Z}$. Describa, lo más concretamente posible, $f^{-1}(B)$.

(3). ¿Existe algún subconjunto $A \subset \mathbb{Z}^2$ tal que $f|_A$ sea biyectiva? En caso afirmativo, hallar su inversa.

Ejercicio 25.– Si $f : X \to Y$ es una aplicación y $A \subset X$ un subconjunto no vacío, la definición de la imagen de A por f es:

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists x \in A \ \text{ tal que } \ f(x) = y\}.$$

Si en la definición anterior cambiamos $\exists$ por $\forall$ obtendríamos una nueva definición:

$$f\langle A\rangle := \{y \in Y \mid \forall x \in A \ \text{ se tiene } \ f(x) = y\}.$$

¿Cuándo es $f\langle A\rangle$ no vacío? ¿Cuándo es $f\langle A\rangle$ vacío? Si $f\langle A\rangle$ es no vacío, ¿puede ser $f\langle A\rangle$ un subconjunto arbitrario de Y (tomando un X, un $A \subset X$ y una $f : X \to Y$ apropiados)? (Indicación: trate primero ejemplos sencillos en los que los conjuntos implicados tengan entre 2 y 4 elementos)

Ejercicio 26.– Sea X un conjunto. Dar una aplicación biyectiva de $\mathscr{P}(X)$ en $\{0,1\}^X$.

Ejercicio 27.– Sea $f : X \to Y$ una aplicación y consideremos $\bar{f} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ la aplicación definida por:

$$\bar{f}(A) = f(A) \quad \text{(la imagen del subconjunto } A \text{ por la aplicación } f) \quad \forall A \in \mathscr{P}(X).$$

Probar que:

(1). f es inyectiva si y sólo si $\bar{f}$ es inyectiva.

(2). f es sobreyectiva si y sólo si $\bar{f}$ es sobreyectiva.

Ejercicio 28.– Sea un entero $n \geq 1$, $A = \{1, \ldots, n\}$ y $f : A \to A$ una aplicación. Probar que f es inyectiva si y sólo si f es sobreyectiva. Probar, con un ejemplo, que el resultado es falso si $A = \mathbb{N}$.

Ejercicio 29.– Sean X, Y conjuntos disjuntos. Probar que existe una aplicación biyectiva "natural" de $\mathscr{P}(X \cup Y)$ en $\mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(Y)$.

Ejercicio 30.– Sean X, Y, Z conjuntos. Probar que existe una aplicación biyectiva "natural" de $Z^{X\times Y}$ en $(Z^Y)^X$.

Ejercicio 31.– Sean X, Y conjuntos disjuntos. Probar que existe una aplicación biyectiva "natural" de $Z^{X\cup Y}$ en $Z^X \times Z^Y$.

Relaciones de equivalencia. Conjuntos cocientes

Ejercicio 32.– ¿Son las siguientes relaciones de equivalencia?

(1). En $\mathbb{R}$, $x\,R\,y \iff xy > 0$.

(2). En $\mathbb{Z}$, $x\,R\,y \iff xy \geq 0$.

(3). En $\mathbb{R}^2$, $(x, y)\,R\,(x'y') \iff$ existe un $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $x = \lambda x'$ e $y = \lambda y'$

(4). En $\mathbb{Z}$, $x\,R\,y \iff x - y$ es múltiplo de 6.

(5). En $\mathscr{P}(X)$, $A\,R\,B \iff A \cap B \neq \emptyset$, siendo X un conjunto dado.

(6). En $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$.

(7). En $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff y_1 = y_2$.

(8). En $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)\,R\,(x_2, y_2) \iff y_2 - y_1 = 2(x_2 - x_1)$.

(9). En $\mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \geq 0$.

En los casos afirmativos, describir el conjunto cociente.

Ejercicio 33.– En cada uno de los siguientes casos, definir una relación de equivalencia en el conjunto A de forma que B sea el conjunto cociente asociado, o demostrar que no es posible.

(1). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \{3, 4\}\}$.

(2). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$.

(3). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\}$.

(4). $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\{1\}, \{3, 4\}\}$.

(5). $A = \mathbb{R}^2$, $B = \{$Rectas verticales de $\mathbb{R}^2\}$.

(6). $A = \mathbb{R}^2$, $B = \{$Elipses de $\mathbb{R}^2$ centradas en $(0, 0)\}$.

(7). $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, $B = \{$Semirrectas abiertas de $\mathbb{R}^2$ con vértice el origen$\}$.

(8). $A = \mathbb{R}$, $B = \{[n, n + 1) \mid \ n \in \mathbb{Z}\}$.

(9). $A = \mathbb{Z}$,
$B = \{\{$Subconjuntos de $\mathbb{Z}$ de cardinal par$\}$, $\{$Subconjuntos de $\mathbb{Z}$ de cardinal impar$\}\}$.

Ejercicio 34.– Sea A un conjunto, sea B el conjunto cociente de A por una relación de equivalencia, y sea $\mathscr{P}(A)$ el conjunto formado por los subconjuntos de A. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

(1). $A \subset \mathscr{P}(A)$.

(2). $A \in \mathscr{P}(A)$.

(3). $B \subset \mathscr{P}(A)$.

(4). $B \in \mathscr{P}(A)$.

(5). $A \subset B$.

(6). $A \in B$.

Ejercicio 35.– En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se considera la relación

$$aRb \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$

Se pide:

(1). Demostrar que R es una relación de equivalencia.

(2). Dar explícitamente las clases de equivalencia de 2 y de $\frac{1}{2}$.

(3). Demostrar que el conjunto cociente $\mathbb{Q}/R$ es infinito.

Ejercicio 36.– Sea $\mathscr{M}$ el conjunto de matrices 2×2 con coeficientes en $\mathbb{Z}$, y definamos la siguiente relación en $\mathscr{M}$:

$$A \sim B \iff A - B \text{ tiene todas sus entradas pares.}$$

(1). Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia.

(2). Demuestre que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Calcule la clase de equivalencia de la matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(3). Calcule el cardinal del conjunto cociente $\mathscr{M}/\sim$.

Ejercicio 37.– En cada caso A es el conjunto de los alumnos de esta Facultad y $X \subset \mathscr{P}(A)$. Explique razonadamente si X es el conjunto cociente de alguna relación de equivalencia sobre A, cuando:

(1). Los elementos de X son los subconjuntos de alumnos matriculados en cada asignatura.

(2). Los elementos de X son los subconjuntos de alumnos nacidos el mismo año.

Ejercicio 38.– En el conjunto A de los habitantes de una ciudad, explique razonadamente si las siguientes son relaciones de equivalencia:

(1). Dos personas están relacionadas si, o bien ninguna de las dos ha ido al cine el año pasado, o bien ambas han ido y en las películas que han visto hay alguna coincidencia.

(2). Dos personas están relacionadas si, o bien ninguna de las dos ha ido al cine el año pasado, o bien ambas han ido y han visto exactamente las mismas películas.

Ejercicio 39.– Sea $f : A \to B$ una aplicación. En el conjunto A se considera la relación

$$xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

(1). Demostrar que R es una relación de equivalencia.

(2). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por $f(x) = x^2$, describir las clases de equivalencia de 0, 1 y -1.

(3). Describir el conjunto cociente A/R para la f del apartado anterior.

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Ejercicio 40.– Sean X e Y conjuntos. Pruebe que los conjuntos $X \times Y$ e $Y \times X$ son equipotentes.

Ejercicio 41.– Consideremos dos números enteros $m, n \geq 1$ y sea $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ una aplicación. Probar las siguientes propiedades:

(1). Si f es inyectiva, entonces $m \leq n$.

(2). Si f es sobreyectiva, entonces $m \geq n$.

(3). Si f es biyectiva, entonces $m = n$.

Ejercicio 42.– Consideremos un número entero $m \geq 1$ y sea $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m\}$ una aplicación. Probar que las propiedades siguientes son equivalentes:

(a) f es inyectiva.

(b) f es sobreyectiva.

(c) f es biyectiva.

Ejercicio 43.– Consideremos un número entero $m \geq 1$ e $Y \subset \{1, \ldots, m\}$ un subconjunto no vacío. Probar que existe un entero $n \geq 1$ y una aplicación biyectiva $f : \{1, \ldots, n\} \to Y$. Además, por ejercicio anterior se deberá tener $n \leq m$.

Ejercicio 44.– Sea X un conjunto finito. Probar que $\mathscr{P}(X)$ también es finito y que

$$\sharp(\mathscr{P}(X)) = 2^{\sharp(X)}.$$

Ejercicio 45.– Sean X e Y conjuntos finitos. Probar que Y^X también es finito y que

$$\sharp\left(Y^X\right) = \sharp(Y)^{\sharp(X)}.$$

Ejercicio 46.– Probar que el producto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Ejercicio 47.– Probar que el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros es equipotente a $\mathbb{N}$.

Ejercicio 48.– Probar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es equipotente a $\mathbb{N}$.

Ejercicio 49.– Probar que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales no es equipotente a $\mathbb{N}$.

Ejercicio 50.– Sea X un conjunto finito y $f : X \to X$ una aplicación. Probar que existe un entero $n > 1$ tal que $f^n = f$. ¿Puede dar una cota superior del mínimo n que satisface lo anterior? ¿Es cierto el resultado anterior si X no es finito?