APELLIDOS **NOMBRE**

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 40 puntos: el primer ejercicio vale 12 puntos, el segundo y el tercero valen 10 puntos y el cuarto 8 puntos.
Se recomienda dejar para el final los últimos apartados de los ejercicios 2 y 4.

Ejercicio 1. (12 puntos) Sean X e Y unos conjuntos, $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$ unos subconjuntos cualesquiera y $f : X \to Y$ una aplicación. Se pide lo siguiente:

1. (4 puntos)

a) La definición formal de la *imagen* de A por f, que denotamos por $f(A)$.

b) La definición formal de *anti-imagen* (o *imagen inversa*) de B por f, que denotamos por $f^{-1}(B)$.

2. (4 puntos) Contestar VERDADERO o FALSO a cada una de las proposiciones o igualdades siguientes[1]:

-) Si $B \subset B'$ entonces $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $A = f^{-1}(f(A))$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) Si $x \in X$: $f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(B)$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐

3. (4 puntos) Probar que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Solución.-

1.

a) $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ t.q. } y = f(x)\}$

b) $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

2.

-) Si $B \subset B'$ entonces $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $A = f^{-1}(f(A))$.	VERDADERO ☐	FALSO X
-) Si $x \in X$: $f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(B)$.	VERDADERO X	FALSO ☐

3. Procederemos por doble inclusión.

Si $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$, entonces existirá un $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$ y por tanto $y \in f(A)$. Por otra parte, como $x \in f^{-1}(B)$, tendremos que $f(x) \in B$ y por tanto $y \in B$. Así pues, $y \in f(A) \cap B$. Esto demuestra que $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.
[Otra forma de probar esta inclusión es utilizando algunas propiedades "conocidas": $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap f(f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.]

Si $y \in f(A) \cap B$, entonces $y \in f(A)$ e $y \in B$. Por la primera pertenencia, existirá un $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Ahora bien, como $f(x) = y \in B$, se tendrá que $x \in f^{-1}(B)$. Por tanto, $x \in A \cap f^{-1}(B)$ e $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Esto demuestra que $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.

Ejercicio 2. (10 puntos) Sean X, Y, Z unos conjuntos y $f : X \to Y$ una aplicación.

1. (3 puntos) Dadas unas aplicaciones $g : Y \to Z, g' : Y \to Z$, probar que si f es sobreyectiva y $g \circ f = g' \circ f$, entonces $g = g'$.

2. (1 punto) Definimos la aplicación $f^* : Z^Y \longrightarrow Z^X$ por: $f^*(g) := g \circ f$ para toda $g \in Z^Y$. ¿Qué podemos decir de la aplicación f^* cuando f sea sobreyectiva?

[1] No se pide probar nada. Cada respuesta correcta se contará como 2/3 de punto y cada respuesta incorrecta como -2/3 de punto. La puntuación de este apartado será siempre ≥ 0.

3. Sea $\mathscr{S}$ una relación de equivalencia en Y. Definimos la siguiente relación en Y^X:

$$\text{dadas} \quad f', f'' \in Y^X, \qquad f' \mathscr{R} f'' \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} f'(x) \mathscr{S} f''(x) \quad \forall x \in X.$$

a) (3 puntos) Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en Y^X.
b) (3 puntos) ¿Hay alguna aplicación natural de $Y^X/\mathscr{R}$ en $(Y/\mathscr{S})^X$? ¿Es inyectiva? ¿Es biyectiva?

Solución.-
1. Supongamos que f es sobreyectiva y $g \circ f = g' \circ f$. Para probar que $g = g'$, hemos de probar que $\forall y \in Y$, $g(y) = g'(y)$. Ahora bien, como f es sobreyectiva, para todo $y \in Y$ existirá un $x \in X$ tal que $y = f(x)$, y por tanto:

$$g(y) = g(f(x) = (g \circ f)(x) = (g' \circ f)(x) = g'(f(x) = g(y).$$

2. Supongamos que f es sobreyectiva. Utilizando el apartado anterior obtenemos que

$$f^*(g) = f^*(g') \Longrightarrow g \circ f = g' \circ f \Longrightarrow g = g'$$

y por tanto f^* es inyectiva.

3.
$\mathscr{R}$ es reflexiva: para toda $f' \in Y^X$ y para todo $x \in X$ tenemos que $f'(x) \mathscr{S} f'(x)$ (puesto que $\mathscr{S}$ es reflexiva), y por tanto $f' \mathscr{R} f'$.

$\mathscr{R}$ es simétrica: dadas $f', f'' \in Y^X$, si $f' \mathscr{R} f''$, entonces $f'(x) \mathscr{S} f''(x)$ para todo $x \in X$, de donde $f''(x) \mathscr{S} f'(x)$ para todo $x \in X$ ((puesto que $\mathscr{S}$ es simétrica), por lo que $f'' \mathscr{R} f'$.

$\mathscr{R}$ es transitiva: dadas $f', f'', f''' \in Y^X$, si $f' \mathscr{R} f''$ y $f'' \mathscr{R} f'''$, entonces para todo $x \in X$ se tendrá que $f'(x) \mathscr{S} f''(x)$ y $f''(x) \mathscr{S} f'''(x)$, de donde $f'(x) \mathscr{S} f'''(x)$ para todo $x \in X$ (puesto que $\mathscr{S}$ es transitiva), y por tanto $f' \mathscr{R} f'''$.

4. Denotemos por $\pi : Y \longrightarrow Y/\mathscr{S}$ la proyección natural, que verifica lo siguiente:

$$\text{dados} \quad y, y' \in Y: \quad y \mathscr{S} y' \Longleftrightarrow \pi(y) = \pi(y').$$

Con la aplicación π podemos definir otra aplicación

$$h \in Y^X \longmapsto \pi \circ h \in (Y/\mathscr{S})^X$$

que se suele denotar por π_*. Es decir, $\pi_* : Y^X \longrightarrow (Y/\mathscr{S})^X$ está definida por $\pi_*(h) = \pi \circ h$ para toda $h \in Y^X$.
Dadas $h, h' \in Y^X$ se tiene que

$$h \mathscr{R} h' \Longleftrightarrow h(x) \mathscr{S} h'(x) \ \forall x \in X \Longleftrightarrow \pi(h(x) = \pi(h'(x)) \ \forall x \in X \Longleftrightarrow \pi \circ h = \pi \circ h' \Longleftrightarrow \pi_*(h) = \pi_*(h').$$

Así pues, $\mathscr{R} = \mathscr{R}_{\pi_*}$ y utilizando la factorización canónica de π_* obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y^X \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\text{proy. can.}"'] & (Y/\mathscr{S})^X \\
Y^X/\mathscr{R} \arrow[r, "\sim", "F"'] & \mathrm{Im}(\pi_*) \arrow[u, "\text{inc.}"']
\end{tikzcd}$$

donde F es una aplicación biyectiva. De esta forma hemos obtenido una aplicación natural inyectiva $Y^X/\mathscr{R} \longrightarrow (Y/\mathscr{S})^X$.

La aplicación anterior será sobreyectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(\pi_*) = (Y/\mathscr{S})^X$, es decir, si y sólo si π_* es sobreyectiva, y esto también cierto.

Ejercicio 3. (10 puntos) Dadas las permutaciones de $\mathbb{S}_{10}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 9 & 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 10 & 8 & 1 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:
1. (3 puntos) Obtener la descomposición como producto de ciclos disjuntos de σ y de τ. ¿Cuál es el orden de σ? ¿Y su signo?
2. (2 puntos) Obtener una descomposición de σ como producto de trasposiciones.
3. (3 puntos) ¿Tiene $\mathbb{S}_{10}$ algún elemento de orden 11? ¿Y de orden 21? (Responder razonadamente)
4. (2 puntos) Encontrar, si existe, una permutación $\alpha \in \mathbb{S}_{10}$ tal que $\tau = \alpha \sigma \alpha^{-1}$.

Solución.-

1.

$$\sigma = (16)(2345)(79\,10), \quad \tau = (1687)(23)(5\,10\,9).$$

El orden de σ es 12, el mínimo común múltiplo de los órdenes de sus ciclos: 2,4,3. El signo de σ es el producto de los signos de cada uno sus ciclos y por tanto es $+1$.

2. Por el teorema de Lagrange, el orden de cualquier elemento de $\mathbb{S}_{10}$ debe dividir a 10!. Puesto que 11 no divide a 10!, $\mathbb{S}_{10}$ no tendrá ningún elemento de orden 11.

Sin embargo, $\mathbb{S}_{10}$ si tiene elementos de orden 21. Por ejemplo: $(1234567)(89\,10)$.

3. Basta tomar la α definida por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 & 5 & 4 & 10 & 9 \end{pmatrix},$$

puesto que:

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha(16)(2345)(79\,10)\alpha^{-1} = (\alpha(16)\alpha^{-1})(\alpha(2345)\alpha^{-1})(\alpha(79\,10)\alpha^{-1}) = (23)(1687)(5\,10\,9) = \tau.$$

Ejercicio 4. (8 puntos) Se pide lo siguiente:

1. (3 puntos) Dar la definición de subgrupo de un grupo. Enunciar el Teorema de Lagrange.

2. (2 puntos) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Probar que si G' es un subgrupo de G, entonces $f(G')$ es un subgrupo de H.

3. (3 puntos) Dado un grupo G (con notación multiplicativa), definimos la siguiente relación en G: un elemento $g \in G$ es *conjugado* con un elemento $g' \in G$, y lo denotamos por $g \sim g'$, si (y sólo si) existe un $h \in G$ tal que $g' = hgh^{-1}$. Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en G. ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación $\sim$ cuando el grupo G sea $(\mathbb{Z}, +)$? ¿Y cuando sea $\mathbb{S}_5$?

Solución.-

1. Ver las notas de teoría.

2. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos y G' es un subgrupo de G.

-) $e_H = f(e_G) \in f(G')$.

-) Si $h, h' \in f(G')$, entonces existirán $g, g' \in G'$ tales que $f(g) = h, f(g') = h'$, y $hh' = f(g)f(g') = f(gg') \in f(G')$ puesto que $gg' \in G'$.

-) Si $h \in f(G')$, existirá $h \in G'$ tal que $f(g) = h$, pero $h^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \in f(G')$ puesto que $g^{-1} \in G'$.

3.

$\sim$ es reflexiva: dado $g \in G$, siempre tenemos que $g = ege^{-1}$, y por tanto $g \sim g$.

$\sim$ es simétrica: dados $g, g' \in G$, si $g \sim g'$, existirá un $h \in G$ tal que $g' = hgh^{-1}$, pero entonces $h^{-1}g'h = g$, o de forma equivalente $g = h^{-1}g'(h^{-1})^{-1}$, por lo que $g' \sim g$.

$\sim$ es transitiva: dados $g, g', g'' \in G$, si $g \sim g'$ y $g' \sim g''$, existirán $h_1, h_2 \in G$ tales que $g' = h_1gh_1^{-1}$ y $g'' = h_2g'h_2^{-1}$. De aquí deducimos que

$$g'' = h_2(h_1gh_1^{-1})h_2^{-1} = h_2h_1gh_1^{-1}h_2^{-1} = (h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1}$$

y por tanto $g \sim g''$.

Cuando el grupo G sea el grupo aditivo de los números enteros, al ser abeliano, cada $g \in \mathbb{Z}$ sólo será conjugado con él mismo y por tanto todas las clases de equivalencia estarán formadas por un único número. De aquí deducimos que habrá infinitas clases de equivalencia (de hecho habrá una biyección entre $\mathbb{Z}$ y el conjunto cociente).

Cuando el grupo G sea $\mathbb{S}_5$, las clases de equivalencia se corresponderán a los distintos tipos de descomposiciones en ciclos disjuntos:

$$(), \quad (\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet)(\bullet\bullet), \quad (\bullet\bullet)(\bullet\bullet\bullet),$$

por lo que habrá 7 clases de equivalencia (denominadas *de conjugación* en esta caso) distintas.