

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 40 puntos: el primer ejercicio vale 12 puntos, el segundo y el tercero valen 10 puntos y el cuarto 8 puntos. **Se recomienda dejar para el final los últimos apartados de los ejercicios 2 y 4.**

Ejercicio 1. (12 puntos) Sean X e Y unos conjuntos, $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$ unos subconjuntos cualesquiera y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Se pide lo siguiente:

1. (4 puntos)
 - a) La definición formal de la *imagen* de A por f , que denotamos por $f(A)$.
 - b) La definición formal de *anti-imagen* (o *imagen inversa*) de B por f , que denotamos por $f^{-1}(B)$.
2. (4 puntos) Contestar VERDADERO o FALSO a cada una de las proposiciones o igualdades siguientes¹:

-) Si $B \subset B'$ entonces $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
-) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
-) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
-) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
-) $A = f^{-1}(f(A))$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
-) Si $x \in X: f(x) \in B \iff x \in f^{-1}(B)$.	VERDADERO <input type="checkbox"/>	FALSO <input type="checkbox"/>
3. (4 puntos) Probar que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Ejercicio 2. (10 puntos) Sean X, Y, Z unos conjuntos y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación.

1. (3 puntos) Dadas unas aplicaciones $g : Y \rightarrow Z, g' : Y \rightarrow Z$, probar que si f es sobreyectiva y $g \circ f = g' \circ f$, entonces $g = g'$.
2. (1 punto) Definimos la aplicación $f^* : Z^Y \rightarrow Z^X$ por: $f^*(g) := g \circ f$ para toda $g \in Z^Y$. ¿Qué podemos decir de la aplicación f^* cuando f sea sobreyectiva?
3. Sea \mathcal{S} una relación de equivalencia en Y . Definimos la siguiente relación en Y^X :

$$\text{dadas } f', f'' \in Y^X, \quad f' \mathcal{R} f'' \stackrel{\text{def}}{\iff} f'(x) \mathcal{S} f''(x) \quad \forall x \in X.$$

- a) (3 puntos) Probar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia en Y^X .
- b) (3 puntos) ¿Hay alguna aplicación natural de Y^X / \mathcal{R} en $(Y/\mathcal{S})^X$? ¿Es inyectiva? ¿Es biyectiva?

Ejercicio 3. (10 puntos) Dadas las permutaciones de \mathbb{S}_{10}

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 9 & 8 & 10 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 10 & 8 & 1 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:

1. (3 puntos) Obtener la descomposición como producto de ciclos disjuntos de σ y de τ . ¿Cuál es el orden de σ ? ¿Y su signo?
2. (2 puntos) Obtener una descomposición de σ como producto de trasposiciones.
3. (3 puntos) ¿Tiene \mathbb{S}_{10} algún elemento de orden 11? ¿Y de orden 21? (Responder razonadamente)
4. (2 puntos) Encontrar, si existe, una permutación $\alpha \in \mathbb{S}_{10}$ tal que $\tau = \alpha \sigma \alpha^{-1}$.

Ejercicio 4. (8 puntos) Se pide lo siguiente:

1. (3 puntos) Dar la definición de subgrupo de un grupo. Enunciar el Teorema de Lagrange.
2. (2 puntos) Sea $f : G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos. Probar que si G' es un subgrupo de G , entonces $f(G')$ es un subgrupo de H .
3. (3 puntos) Dado un grupo G (con notación multiplicativa), definimos la siguiente relación en G : un elemento $g \in G$ es *conjugado* con un elemento $g' \in G$, y lo denotamos por $g \sim g'$, si (y sólo si) existe un $h \in G$ tal que $g' = hgh^{-1}$. Probar que la relación \sim es una relación de equivalencia en G . ¿Cuántas clases de equivalencia tiene la relación \sim cuando el grupo G sea $(\mathbb{Z}, +)$? ¿Y cuando sea \mathbb{S}_5 ?

¹No se pide probar nada. Cada respuesta correcta se contará como 2/3 de punto y cada respuesta incorrecta como -2/3 de punto. La puntuación de este apartado será siempre ≥ 0 .