Álgebra Básica Soluciones de la Primera prueba parcial. Grupo C 6-11-2017

APELLIDOS **NOMBRE**

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 40 puntos: el primer ejercicio vale 12 puntos, el segundo y el tercero valen 10 puntos y el cuarto 8 puntos.

Ejercicio 1. (12 puntos) Sean X e Y unos conjuntos, $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$ unos subconjuntos cualesquiera y $f : X \to Y$ una aplicación. Se pide lo siguiente:

1. (4 puntos)

a) La definición formal de la *imagen* de A por f, que denotamos por $f(A)$.

b) La definición formal de *anti-imagen* (o *imagen inversa*) de B por f, que denotamos por $f^{-1}(B)$.

2. (4 puntos) Contestar VERDADERO o FALSO a cada una de las proposiciones o igualdades siguientes[1]:

-) Si $A \subset A'$ entonces $f(A) \subset f(A')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $A \subset f^{-1}(f(A))$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) $B = f(f^{-1}(B))$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐
-) Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$.	VERDADERO ☐	FALSO ☐

3. (4 puntos) Si f es inyectiva, probar que si $x \in X$ y $f(x) \in f(A)$, entonces $x \in A$. Concluir que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. ¿Sería cierta la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$?

Solución.-

1.

a) $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ t.q. } y = f(x)\}$

b) $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

2.

-) Si $A \subset A'$ entonces $f(A) \subset f(A')$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.	VERDADERO ☐	FALSO X
-) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $A \subset f^{-1}(f(A))$.	VERDADERO X	FALSO ☐
-) $B = f(f^{-1}(B))$.	VERDADERO ☐	FALSO X
-) Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$.	VERDADERO X	FALSO ☐

3. Supongamos que f es inyectiva.

Si $x \in X$ y $f(x) \in f(A)$, existirá un $a \in A$ tal que $f(x) = f(a)$, y por ser f inyectiva tendremos $x = a$, de donde $x \in A$.

Así pues, si $x \in f^{-1}(f(A))$ tendremos $f(x) \in f(A)$, y por lo que acabamos de probar, $x \in A$. Es decir, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Por otra parte, como la inclusión $A \subset f^{-1}(f(A))$ siempre se da, llegamos a que la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$ es cierta.

Ejercicio 2. (10 puntos) Sea $n \geq 1$ un número natural y $X = \{1, \ldots, n\}$. Definimos la siguiente relación en $\mathscr{P}(X)$:

$$\text{dados } A, B \in \mathscr{P}(X), \qquad A \mathscr{R} B \overset{\text{def.}}{\iff} \exists f : A \to B \text{ aplicación biyectiva.}$$

---

[1]No se pide probar nada. Cada respuesta correcta se contará como 2/3 de punto y cada respuesta incorrecta como -2/3 de punto. La puntuación de este apartado será siempre ≥ 0.

1. (3 puntos) Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{P}(X)$.

2. (2 puntos) Para $n = 3$, dar todos los elementos del conjunto cociente $\mathscr{P}(X)/\mathscr{R}$.

3. (5 puntos) Dar una biyección entre el conjunto $\{0, 1, \ldots, n\}$ y el conjunto cociente $\mathscr{P}(X)/\mathscr{R}$.

Solución.-
1.

$\mathscr{R}$ es reflexiva: para todo $A \in \mathscr{P}(X)$ siempre existe la aplicación biyectiva $1_A : A \to A$ y por tanto $A\mathscr{R}A$.

$\mathscr{R}$ es simétrica: sean $A, B \in \mathscr{P}(X)$ tales que $A\mathscr{R}B$, es decir, tales que existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$. Como toda aplicación biyectiva es invertible, la aplicación f tiene inversa $f^{-1} : B \to A$, que también es biyectiva (las aplicaciones biyectivas coinciden con las invertibles), y por tanto $B\mathscr{R}A$.

$\mathscr{R}$ es transitiva: sean $A, B, C \in \mathscr{P}(X)$ tales que $A\mathscr{R}B$ y $B\mathscr{R}C$, es decir, tales que existen aplicaciones biyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Puesto que la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva, la aplicación $g \circ f : A \to C$ también será biyectiva, por lo que $A\mathscr{R}C$.

2. Para $n = 3$, $X = \{1, 2, 3\}$ y

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, X\}.$$

El conjunto cociente será

$$\mathscr{P}(X)/\mathscr{R} = \{\{\emptyset\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}, \{X\}\}.$$

2. La idea es que las clases de equivalencia de $\mathscr{R}$ están formadas por los conjuntos cuyos elementos son todos los subconjuntos de X con el mismo número de elementos, y por tanto habrá tantas clases de equivalencia como números entre 0 y n.

Esta idea la podemos formalizar de la siguiente manera: definimos la aplicación

$$f : \mathscr{P}(X) \longrightarrow \{0, 1, \ldots, n\}, \quad f(A) = \sharp(A).$$

Está claro que f es sobreyectiva: $f(\emptyset) = 0$, $f(\{1, \ldots, k\}) = k$ para $k = 1, \ldots, n$.

También se tiene que $A\mathscr{R}B \iff f(A) = f(B)$, de donde $\mathscr{R} = \mathscr{R}_f$, por lo que podemos aplicar la factorización canónica para deducir la existencia de una aplicación biyectiva

$$\overline{f} : \mathscr{P}(X)/\mathscr{R} \longrightarrow \{0, 1, \ldots, n\}$$

que justamente envía la clase de equivalencia formada por los subconjuntos de X con k elementos en k, para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ejercicio 3. (10 puntos) Dadas las permutaciones de S_9

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:

1. (4 puntos) Obtener la descomposición como producto de ciclos disjuntos de σ y de τ. ¿Cuál es el orden de σ? ¿Y su signo?

2. (3 puntos) ¿Tiene S_9 algún elemento de orden 11? ¿Y de orden 12? (Responder razonadamente)

3. (3 puntos) Encontrar, si existe, una permutación $\alpha \in S_9$ tal que $\tau = \alpha\sigma\alpha^{-1}$.

Solución.-
1.

$$\sigma = (135)(246)(789), \quad \tau = (157)(268)(349.$$

El orden de σ es 3, puesto que $\sigma^3 = (135)^3(246)^3(789)^3 = ()$ y $\sigma^2 \neq ()$. El signo de σ es el producto de los signos de cada uno sus ciclos y por tanto es $+1$.

2. Por el teorema de Lagrange, el orden de cualquier elemento de S_9 debe dividir a $9!$. Puesto que 11 no divide a $9!$, S_9 no tendrá ningún elemento de orden 11.

La permutación $(123)(4567)$ tiene orden 12 (se deja la comprobación).

3. Basta tomar la α definida por

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 & 3 & 4 & 9 \end{pmatrix},$$

puesto que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha(135)(246)(789)\alpha^{-1} = (\alpha(135)\alpha^{-1})(\alpha(246)\alpha^{-1})(\alpha(789)\alpha^{-1}) = \cdots = \tau$.

Ejercicio 4. (8 puntos) Se pide lo siguiente:

1. (3 puntos) Dar la definición de subgrupo de un grupo. Dar la definición de orden de un elemento de un grupo. Enunciar el Teorema de Lagrange.

2. (3 puntos) Dar la lista de todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ (Razonar la respuesta)

3. (2 puntos) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Probar que si H' es un subgrupo de H, entonces $f^{-1}(H')$ es un subgrupo de G

Solución.-

1. Ver las notas de teoría.

2. Los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ son de la forma

$$\mathbb{Z}n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ es múltiplo de } \ n\}$$

con $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Se deja la demostración al lector.

3. Como $f(e_G) = e_H$ y $e_H \in H'$, se tiene que $e_G \in f^{-1}(H')$.

Si $x, y \in f^{-1}(H')$, entonces $f(x), f(y) \in H'$, de donde $f(x)f(y) \in H'$, y como f es un homomorfismo de grupos, $f(xy) = f(x)f(y)$, por lo que $f(xy) \in H'$ y $xy \in f^{-1}(H')$.

Si $x \in f^{-1}(H')$, $f(x) \in H'$, de donde $f(x)^{-1} \in H'$. Como f es un homomorfismo, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$, por lo que $x^{-1} \in f^{-1}(H')$.