**APELLIDOS** **NOMBRE**

---

**Instrucciones.** Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 40 puntos: el primer ejercicio vale 12 puntos, el segundo y el tercero valen 10 puntos y el cuarto 8 puntos.

**Ejercicio 1.** (12 puntos) Sean $X$ e $Y$ unos conjuntos, $A, A' \subset X$, $B, B' \subset Y$ unos subconjuntos cualesquiera y $f : X \to Y$ una aplicación. Se pide lo siguiente:

**1.** (4 puntos)

a) La definición formal de la *imagen* de $A$ por $f$, que denotamos por $f(A)$.

b) La definición formal de *anti-imagen* (o *imagen inversa*) de $B$ por $f$, que denotamos por $f^{-1}(B)$.

**2.** (4 puntos) Contestar VERDADERO o FALSO a cada una de las proposiciones o igualdades siguientes[1]:

| | | |
|---|---|---|
| -) Si $A \subset A'$ entonces $f(A) \subset f(A')$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |
| -) $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |
| -) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |
| -) $A \subset f^{-1}(f(A))$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |
| -) $B = f(f^{-1}(B))$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |
| -) Si $x \in A$ entonces $f(x) \in f(A)$. | VERDADERO ☐ | FALSO ☐ |

**3.** (4 puntos) Si $f$ es inyectiva, probar que si $x \in X$ y $f(x) \in f(A)$, entonces $x \in A$. Concluir que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. ¿Sería cierta la igualdad $f^{-1}(f(A)) = A$?

**Ejercicio 2.** (10 puntos) Sea $n \geq 1$ un número natural y $X = \{1, \dots, n\}$. Definimos la siguiente relación en $\mathscr{P}(X)$:

$$\text{dados } A, B \in \mathscr{P}(X), \qquad A \mathscr{R} B \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists f : A \to B \text{ aplicación biyectiva.}$$

**1.** (3 puntos) Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathscr{P}(X)$.

**2.** (2 puntos) Para $n = 3$, dar todos los elementos del conjunto cociente $\mathscr{P}(X)/\mathscr{R}$.

**3.** (5 puntos) Dar una biyección entre el conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$ y el conjunto cociente $\mathscr{P}(X)/\mathscr{R}$.

**Ejercicio 3.** (10 puntos) Dadas las permutaciones de $S_9$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 8 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 4 & 9 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide lo siguiente:

**1.** (4 puntos) Obtener la descomposición como producto de ciclos disjuntos de $\sigma$ y de $\tau$. ¿Cuál es el orden de $\sigma$? ¿Y su signo?

**2.** (3 puntos) ¿Tiene $S_9$ algún elemento de orden 11? ¿Y de orden 12? (Responder razonadamente)

**3.** (3 puntos) Encontrar, si existe, una permutación $\alpha \in S_9$ tal que $\tau = \alpha\sigma\alpha^{-1}$.

**Ejercicio 4.** (8 puntos) Se pide lo siguiente:

**1.** (3 puntos) Dar la definición de subgrupo de un grupo. Dar la definición de orden de un elemento de un grupo. Enunciar el Teorema de Lagrange.

**2.** (3 puntos) Dar la lista de todos los subgrupos de $(\mathbb{Z}, +)$ (Razonar la respuesta)

**3.** (2 puntos) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. Probar que si $H'$ es un subgrupo de $H$, entonces $f^{-1}(H')$ es un subgrupo de $G$

---

[1] No se pide probar nada. Cada respuesta correcta se contará como 2/3 de punto y cada respuesta incorrecta como -2/3 de punto. La puntuación de este apartado será siempre $\geq 0$.