APELLIDOS   **NOMBRE**

Observaciones:

-) Escribir el nombre y los apellidos en esta hoja, que deberá entregarse con el examen.
-) Escribir la respuesta a cada ejercicio en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por ejercicios.
-) Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.
-) El examen se puntuará sobre 20 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos. Para superar este examen, habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados.

Ejercicio 1. (10 puntos)

(a) (3 puntos) Dados unos conjuntos X, Y, unos subconjuntos $A \subset X$, $B \subset Y$ y una aplicación $f : X \to Y$, probar lo siguiente:
(i) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
(ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Solución. (i) Si $x \in A$, entonces $f(x) \in f(A)$ [esto es por la definición de la imagen $f(A)$: $f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ t.q. } f(x) = y\}$] y por tanto $x \in f^{-1}(f(A))$ [en este último paso hemos utilizado la definición de la anti-imagen $f^{-1}(B)$: dado un $x \in X$, se tiene que $x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B$]. Así pues, hemos demostrado que $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(ii) Si $y \in f(f^{-1}(B))$, entonces existe un $x \in f^{-1}(B)$ tal que $y = f(x)$ [esto es de nuevo por la definición de la imagen $f(A)$: dado un $y \in Y$, se tiene que $y \in f(A) \Longleftrightarrow$ existe un $x \in A$ tal que $y = f(x)$]. Ahora bien, como $x \in f^{-1}(B)$, deducimos que $f(x) \in B$ de donde $y = f(x) \in B$. Así pues, hemos demostrado que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) (3 puntos) Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dadas dos aplicaciones $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, definimos:

$$f \mathscr{R} g \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } \ f(t) = g(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Solución. Tenemos que probar que $\mathscr{R}$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Las dos primeras propiedades son muy fáciles y no las escribiremos. Veamos la transitividad: sean $f, g, h \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con $f \mathscr{R} g$ y $g \mathscr{R} h$, es decir, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $f(t) = g(t)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y existe un $\varepsilon' > 0$ tal que $g(t) = h(t)$ para todo $t \in (-\varepsilon', \varepsilon')$ [este es el punto que muchos han pasado por alto: de que $f \mathscr{R} g$ deducim+mos que existe un cierto $\varepsilon > 0$, y de que $g \mathscr{R} h$ deducimos que existe <u>otro</u> cierto $\varepsilon' > 0$, pero no podemos suponer que $\varepsilon' = \varepsilon$]. Si llamamos $\varepsilon'' = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\} > 0$, tendremos que $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\varepsilon', \varepsilon') = (-\varepsilon'', \varepsilon'')$ y por tanto $f(t) = g(t) = h(t)$ para todo $t \in (-\varepsilon'', \varepsilon'')$, de donde $f \mathscr{R} h$.

(c) (2 puntos) ¿Cuántas relaciones de equivalencia diferentes se pueden definir sobre un conjunto de 4 elementos?

Solución. Consideremos un conjunto X con 4 elementos: $X = \{a, b, c, d\}$ (estamos suponiendo que a, b, c, d son distintos entre sí). Las relaciones de equivalencia en un conjunto están determinadas por (y determinan a) las particiones de dicho conjunto, asi pues habrá tantas relaciones de equivalencia en X como particiones. Ahora bien, las particiones de X son de los siguientes tipos:

(1) $\{\{\bullet\}, \{\bullet\}, \{\bullet\}, \{\bullet\}\}$ (todos los conjuntos de la partición tienen un único elemento, lo que quiere decir que para la relación de equivalencia asociada, cada elemento de X sólo está relacionado consigo mismo).

(2) $\{\{\bullet, \bullet\}, \{\bullet\}, \{\bullet\}\}$ (hay dos elementos del conjunto X que además de estar relacionados con ellos mismos (eso siempre tiene que ocurrir por la reflexividad) están relacionados entre sí, y los otros dos elementos sólo están relacionados consigo mismos).

(3) $\{\{\bullet,\bullet\},\{\bullet,\bullet\}\}$ (hay dos elementos del conjunto X que además de estar relacionados con ellos mismos (eso siempre tiene que ocurrir por la reflexividad) están relacionados entre sí, y a los los otros dos elementos les ocurre lo mismo).

(4) $\{\{\bullet,\bullet,\bullet\},\{\bullet\}\}$ (hay tres elementos del conjunto X que además de estar relacionados con ellos mismos (eso siempre tiene que ocurrir por la reflexividad) están relacionados entre sí, y el otro elemento sólo está realcionado consigo mismo).

(5) $\{\{\bullet,\bullet,\bullet,\bullet\}\}$ (todos los elementos de X están relacionados entre sí).

Del tipo (1) claramente hay 1 única partición; del tipo (2) hay $\binom{4}{2}=6$ particiones; del tipo (3) hay $\frac{1}{2}\binom{4}{2}=3$ particiones; del tipo (4) hay 4 particiones; y del tipo (5) hay 1 única partición. Así pues, X tiene $1+6+3+4+1=15$ relaciones de equivalencia.

(d) (2 puntos) Probar que, para cada natural $n\geq 1$, toda aplicación inyectiva del conjunto $\{1,\ldots,n\}$ en sí mismo es biyectiva. (Indicación: hacer una inducción sobre n)

Solución. $\boxed{\text{Para } n=1}$ Si $f:\{1\}\to\{1\}$ es una aplicación inyectiva, de hecho f no puede ser otra que la única aplicación que hay de $\{1\}$ en $\{1\}$, que es la que $f(1)=1$, y obviamente dicha aplicación es biyectiva.

$\boxed{\text{Supongamos que si } g:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\} \text{ es una aplicación inyectiva, entonces } g \text{ es biyectiva}}$

Sea ahora $f:\{1,\ldots,n,n+1\}\to\{1,\ldots,n,n+1\}$ una aplicación inyectiva. Pueden darse dos casos:

$\boxed{\text{Caso } f(n+1)=n+1\text{:}}$ este caso es fácil, pues como f es inyectiva, entonces

$$f(\{1,\ldots,n\})\subset\{1,\ldots,n\},$$

de donde podemos considerar la aplicación $g:\{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ definida como la restricción de f, es decir: $g(k)=f(k)$ para cada $k=1,\ldots,n$. Como f era inyectiva, g también lo será y, por la hipótesis de inducción, g es biyectiva. De aquí se deduce que f es sobreyectiva (pensarlo un poco), y por tanto f es biyectiva.

$\boxed{\text{Caso } f(n+1)\neq n+1\text{:}}$ Pongamos $f(n+1)=k$, con $1\leq k\leq n$. Consideremos la aplicación $\sigma:\{1,\ldots,n,n+1\}\to\{1,\ldots,n,n+1\}$ definida como sigue:

$$\sigma(i)=\begin{cases} i & \text{si} \quad i\neq k,n+1\\ n+1 & \text{si} \quad i=k\\ k & \text{si} \quad i=n+1.\end{cases}$$

[nótese que σ no es otra cosa que la trasposición $(k,n+1)$] Está claro que σ es invertible (es su propia inversa) y por tanto biyectiva. Así pues la aplicación $f'=\sigma\circ f$ sigue siendo inyectiva. Como $f'(n+1)=n+1$, f' está en el Caso 1 y por tanto f' es biyectiva. De aquí deducimos que f también es biyectiva, puesto que $f=\sigma^{-1}\circ f'=\sigma\circ f'$.

Ejercicio 2. (10 puntos)

(a) (3 puntos) Indicar si cada una de las afirmaciones siguientes es VERDADERA o FALSA, justificando siempre la respuesta:

(i) Todo grupo finito de orden primo es cíclico.

(ii) Cada grupo cíclico finito es isomorfo a $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n,+)$ para algún número natural $n\geq 1$.

Solución. (i) Es VERDADERA. Probémosla: sea G un grupo de orden p primo. Sea $x\in G$ un elemento distinto del elemento neutro, y por tanto de orden >1. Por el teorema de Lagrange, el orden de x ha de ser un divisor de p, y por tanto ha de ser p. Así pues, el orden del subgrupo $\langle x\rangle\subset G$ es p, lo que implica que $G=\langle x\rangle$ y G es cíclico.

(ii) Es VERDADERA. Probémosla: sea G un grupo cíclico finito. Notemos $n=|G|$. Como G es cíclico, existe $x\in G$ tal que $G=\langle x\rangle$. El orden de x será pues también n. Consideremos el homomorfismo $f:\mathbb{Z}\to G$ dado por $f(n)=x^n$ para todo $n\in\mathbb{Z}$. Como el orden de x es n se tiene que $\ker(f)=\mathbb{Z}n$, y como $G=\langle x\rangle$, f es sobreyectivo. Aplicando la factorización canónica, deducimos que $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n\simeq G$.

(b) (3 puntos) Se pide lo siguiente:

(i) ¿Hay algún elemento de orden 10 en $\mathbb{S}_6$? ¿y en $\mathbb{S}_7$? Razonar la respuesta, y en caso afirmativo mostrar un ejemplo.

(ii) Dadas las permutaciones de $\mathbb{S}_8$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 7 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

calcular la descomposición en ciclos disjuntos de cada una de ellas. En caso de que exista, calcular una permutación α tal que $\sigma = \alpha\tau\alpha^{-1}$.

Solución. (i) Para que una permutación tenga orden 10 ha de ser o bien un ciclo de longitud 10, y no hay ninguno en $\mathbb{S}_6$, o bien un producto de ciclos disjuntos tal que el mínimo común múltiplo de sus longitudes sea 10, es decir, al menos un producto de una trasposición $(\bullet\bullet)$ y de un 5-ciclo $(\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet)$ disjuntos, que tampoco podremos encontrar en $\mathbb{S}_6$. Así pues no hay ninguna permutación de orden 10 en $\mathbb{S}_6$.

Sin embargo en $\mathbb{S}_7$ sí que la hay: $(12)(34567)$.

(ii) $\sigma = (157)(234)(68)$, $\tau = (135)(24)(678)$.

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) (4 puntos) Se recuerda que dados dos elementos g y h de un grupo G, se dice que g es **conjugado** con h si existe un $x \in G$ tal que $g = xhx^{-1}$. Más aún, dos permutaciones de $\mathbb{S}_n$ son conjugadas si y solamente si tienen la misma estructura de ciclos en su descomposición en ciclos disjuntos, i.e. la misma cantidad de ciclos disjuntos de cada longitud. Se pide lo siguiente:

(i) Dar una lista de todas las clases de conjugación (i.e. las clases de equivalencia por la relación de conjugación) de $\mathbb{S}_4$, dando, para cada una de ellas su cardinalidad y el orden de sus elementos.

(ii) Demostrar que un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$ es necesariamente una unión de clases de conjugación de las descritas en el apartado anterior.

(iii) Utilizar esta información, junto con el teorema de Lagrange, para calcular todos los subgrupos normales de $\mathbb{S}_4$.

Solución. (i) Hay tantas clases de conjugación en $\mathbb{S}_4$ como posibles estructuras de descomposición en producto de ciclos disjuntos:

(1) $()$
(2) $(\bullet\bullet)$
(3) $(\bullet\bullet)(\bullet\bullet)$
(4) $(\bullet\bullet\bullet)$
(5) $(\bullet\bullet\bullet\bullet)$

La clase de conjugación correspondiente al tipo (1) es la de la identidad: $\{()\}$, que tiene 1 único elemento (el elemento neutro) de orden 1.

La clase de conjugación correspondiente al tipo (2) es la formada por todas las trasposiciones, que tendrá 6 elementos: $\{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$. Todos ellos tienen orden 2.

La clase de conjugación correspondiente al tipo (3) es la formada por todas las permutaciones que se escriben como producto de dos trasposiciones disjuntas, que tendrá 3 elementos: $\{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Todos ellos tienen orden 2.

La clase de conjugación correspondiente al tipo (4) es la formada por todos los 3-ciclos, que tendrá 8 elementos: $\{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$. Todos ellos tienen orden 3.

La clase de conjugación correspondiente al tipo (5) es la formada por todos los 4-ciclos, que tendrá 6 elementos: $\{(1234), (1324), (1432), (1243), (1342), (1423)\}$. Todos ellos tienen orden 4.

[Al final obtenemos $24 = 1 + 6 + 3 + 8 + 6$, que es el número total de elementos de $\mathbb{S}_4$]

(ii) Sea K un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$: esto quiere decir que si $x \in K$, entonces para todo $y \in \mathbb{S}_4$ se tiene que $yxy^{-1} \in K$. Ahora bien, si $x \in K$, la clase de conjugación de x es el conjunto de todos los elementos de $\mathbb{S}_4$ que son conjugados con x, es decir, el conjunto de todos los $z \in \mathbb{S}_4$ para los que existe un $y \in \mathbb{S}_4$ tal que $z = yxy^{-1}$, por lo que necesariamente $z \in K$. Por tanto, la clase de conjugación de cualquier elemento de K está contenida en K, de donde K es unión de clases de conjugación.

(iii) Según hemos visto en (i), $\mathbb{S}_4$ tiene 5 clases de conjugación: $C_1 = \{()\}$,
$C_2 = \{(12), (13), (14), (23), (24), (34)\}$, $C_3 = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$,

$C_4 = \{(123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$ y
$C_5 = \{(1234), (1324), (1432), (1243), (1342), (1423)\}$. Estos son sus cardinales: $\#(C_1) = 1$, $\#(C_2) = 6$, $\#(C_3) = 3$, $\#(C_4) = 8$, $\#(C_5) = 6$.

Según hemos visto en (ii), todo subgrupo normal K de $\mathbb{S}_4$ ha de ser unión de algunas de estas clases. Ciertamente, C_1 siempre estará contenida en K. Por otra parte, por el teorema de Lagrange, el orden de K sólo puede ser 1,2,3,4,6,12 o 24. Si $|K| = 1$ entonces $K = \{()\}$, que siempre es un subgrupo normal, y si $|K| = 24$ entonces $K = \mathbb{S}_4$, que también es un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$.
Si K tuviera orden 3, como tiene que ser unión de clases de conjugación, tendría que contener al menos a otra clase de conjugación distinta de C_1: C_2, C_3, C_4 o C_5, pero en cualquiera de estos casos K tendría más de 4 elemento. Por tanto $\mathbb{S}_4$ no tiene ningún subgrupo normal con 3 elementos.

Si K tuviera orden 4, sólo podría ser (por el apartado (ii)) $K = C_1 \cup C_3$, y en efecto $C_1 \cup C_3 = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ es un subgrupo [compruébese] que necesariamente es normal [como es unión de clases de conjugación, el conjugado de todo elemento de $C_1 \cup C_3$ sigue perteneciendo a $C_1 \cup C_3$] . Así pues $\mathbb{S}_4$ tiene un único subgrupo normal con de orden 4 que es $C_1 \cup C_3$.

Si K tuviera orden 6, K sólo podría contener a C_1 y a C_3, pero entonces nunca llegaría a tener 6 elementos. Por tanto $\mathbb{S}_4$ no tiene ningún subgrupo normal con 6 elementos.

Si K tuviera orden 12, por el apartado (ii) tendríamos que obtener 12 como suma de 1 (el cardinal de C_1) y de otros números de la lista $3, 6, 8$ (los cardinales de las otras clases de conjugación). La única posibilidad es: $12 = 1 + 3 + 8$, que correspondería a: $K = C_1 \cup C_3 \cup C_4$. En efecto, comprobamos que $C_1 \cup C_3 \cup C_4$ es un subgrupo de $\mathbb{S}_4$ [eso no estaba claro *a priori*], y necesariamente será normal (por la misma razón que en el caso de orden 4). Notemos además que $C_1 \cup C_3 \cup C_4$ es el subgrupo alternado, que ya sabíamos que es normal.

Resumiendo, $\mathbb{S}_4$ tiene 4 subgrupos normales:
-) $\{()\} = C_1$, de orden 1.
-) $C_1 \cup C_3$, de orden 4.
-) $C_1 \cup C_3 \cup C_4$, de orden 12.
-) $\mathbb{S}_4 = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$, de orden 24.