APELLIDOS NOMBRE

Observaciones:

-) Escribir el nombre y los apellidos en esta hoja, que deberá entregarse con el examen.
-) Escribir la respuesta a cada ejercicio en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por ejercicios.
-) Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.
-) El examen se puntuará sobre 20 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos. Para superar este examen, habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados.

Ejercicio 1. (10 puntos)

(a) (3 puntos) Dados unos conjuntos X, Y, unos subconjuntos $A \subset X$, $B \subset Y$ y una aplicación $f : X \to Y$, probar lo siguiente:
  (i) $A \subset f^{-1}(f(A))$.
  (ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(b) (3 puntos) Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Dadas dos aplicaciones $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, definimos:

$$f \mathscr{R} g \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \varepsilon > 0 \ \text{ tal que } \ f(t) = g(t) \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) (2 puntos) ¿Cuántas relaciones de equivalencia diferentes se pueden definir sobre un conjunto de 4 elementos?

(d) (2 puntos) Probar que, para cada natural $n \geq 1$, toda aplicación inyectiva del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ en sí mismo es biyectiva. (Indicación: hacer una inducción sobre n)

Ejercicio 2. (10 puntos)

(a) (3 puntos) Indicar si cada una de las afirmaciones siguientes es VERDADERA o FALSA, justificando siempre la respuesta:
  (i) Todo grupo finito de orden primo es cíclico.
  (ii) Cada grupo cíclico finito es isomorfo a $(\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n, +)$ para algún número natural $n \geq 1$.

(b) (3 puntos) Se pide lo siguiente:
  (i) ¿Hay algún elemento de orden 10 en $\mathbb{S}_6$? ¿y en $\mathbb{S}_7$? Razonar la respuesta, y en caso afirmativo mostrar un ejemplo.
  (ii) Dadas las permutaciones de $\mathbb{S}_8$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 7 & 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix},$$

calcular la descomposición en ciclos disjuntos de cada una de ellas. En caso de que exista, calcular una permutación α tal que $\sigma = \alpha\tau\alpha^{-1}$.

(c) (4 puntos) Se recuerda que dados dos elementos g y h de un grupo G, se dice que g es **conjugado** con h si existe un $x \in G$ tal que $g = xhx^{-1}$. Más aún, dos permutaciones de $\mathbb{S}_n$ son conjugadas si y solamente si tienen la misma estructura de ciclos en su descomposición en ciclos disjuntos, i.e. la misma cantidad de ciclos disjuntos de cada longitud. Se pide lo siguiente:
  (i) Dar una lista de todas las clases de conjugación (i.e. las clases de equivalencia por la relación de conjugación) de $\mathbb{S}_4$, dando, para cada una de ellas su cardinalidad y el orden de sus elementos.
  (ii) Demostrar que un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$ es necesariamente una unión de clases de conjugación de las descritas en el apartado anterior.
  (iii) Utilizar esta información, junto con el teorema de Lagrange, para calcular todos los subgrupos normales de $\mathbb{S}_4$.