APELLIDOS NOMBRE

Observaciones:

-) Escribir el nombre y los apellidos en esta hoja, que deberá entregarse con el examen.

-) Escribir la respuesta a cada ejercicio en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por ejercicios.

-) Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.

-) El examen se puntuará sobre 20 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos. Para superar este examen, habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados.

Ejercicio 1. (10 puntos)

(a) Dados unos conjuntos X, Y, unos subconjuntos $A \subset X$, $B \subset Y$ y una aplicación $f : X \to Y$, se pide lo siguiente:

(ii) Pruebe que $f(A) = f(f^{-1}(f(A)))$ y $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

(b) Sean X e Y conjuntos. Se pide lo siguiente:

(i) Dados dos elementos $f, g \in Y^X$, es decir, dos aplicaciones $f, g : X \to Y$, definimos:

$$f \mathscr{R} g \overset{\text{def.}}{\iff} \exists \sigma \in \mathbb{S}_X, \exists \tau \in \mathbb{S}_Y \mid \tau \circ f \circ \sigma = g.$$

Pruebe que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en el conjunto Y^X.

(ii) En las condiciones del apartado (i), pruebe que si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones tales que $f \mathscr{R} g$ y f es inyectiva, entonces g también es inyectiva. Idem para sobreyectiva en lugar de inyectiva. Pruebe que si f y g son inyectivas, entonces $f \mathscr{R} g$.

(iii) En el caso en que $X = \{1, 2\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$, describa las clases de equivalencia de la relación $\mathscr{R}$ del apartado (i), concluyendo cuántas hay.

(c) Demostrar que hay una biyección entre el conjunto de las correspondencias de X en Y, i.e. $\mathscr{P}(X \times Y)$, y el conjunto $\mathscr{P}(Y)^X$ de las aplicaciones de X en el conjunto de las partes de Y. (Aquí habría que dar algunas indicaciones ...)

(d) Sea $n \geq 2$ un entero y sea f la aplicación de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2n$ en $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}n$ definida por $f(a + \mathbb{Z}2n) = a + \mathbb{Z}n$. Sea A un subconjunto de $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2n$ de $n + 1$ elementos.
Demostrar que siempre hay 2 números consecutivos en $f(A)$. ¿Sigue esto siendo cierto si A tiene sólo n elementos?

Ejercicio 2. (a) Indica si cada una de las afirmaciones siguientes es VERDADERA o FALSA, justificando siempre la respuesta:

(i) Existe un isomorfismo de grupos entre $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ (el grupo multiplicativo de los racionales no nulos).

(ii) Sea G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo. Si se tiene que $a, b \in G$ y $ab \in H$ implican que $ba \in H$, entonces H es un subgrupo normal de G.

(b) Sea $\psi : GL(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ el homomorfismo de grupos tal que $\psi(A) = \det(A)$. Hallar $\ker(\psi)$, $\operatorname{Im}(\psi)$, y $GL(2, \mathbb{R})/\ker(\psi)$. ¿Es $\ker(\psi)$ un subgrupo normal de $GL(2, \mathbb{R})$?

(c) Sea el subgrupo $V = \{\mathrm{Id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subset \mathbb{S}_4$. Calcular todos los elementos del conjunto $\operatorname{Aut}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ es isomorfismo}\}$. Probar $(\operatorname{Aut}(V), \circ)$ es un grupo isomorfo a $\mathbb{S}_3$.

(d) Decidir cuáles de las siguientes aplicaciones son homomorfismos de grupos, justificando la respuesta. En caso que lo sean calcular su núcleo y su imagen.

$f_1 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +)$ donde $f_1(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.

$f_2 : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_3$ donde $f_2(\sigma) = \sigma^{-1} \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_3$.

$f_3 : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{S}_3$ donde $f_3(\sigma) = (12)\sigma(12) \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_3$.

$f_4 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}2, +)$ donde $f_4(x) = x^2 + \mathbb{Z}2 \quad \forall x \in \mathbb{Z}$.