

APELLIDOS

NOMBRE

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido. El examen se puntuará sobre 30 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos.

Ejercicio 1 (10 puntos).

- 1) Definir subgrupo normal de un grupo G . Definir homomorfismo de grupos.
- 2) Sean $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos y $S \subset H$ un subgrupo normal. Probar que $f^{-1}(S)$ es un subgrupo normal de G .
- 3) Enunciar la factorización canónica de un homomorfismo de grupos.
- 4) Sea $f: G \rightarrow H$ un homomorfismo de grupos finitos, probar que $|\text{Im}(f)|$ divide a $|G|$.

Ejercicio 2 (10 puntos).

- 1) Probar que un número entero es divisible por 3 si y sólo si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. (Indicación: $10 \equiv 1 \pmod{3}$).
- 2) Un niño quiere recordar cuánto dinero tiene en una hucha. Lo contó ayer y solo recuerda que la cantidad es múltiplo de 13 y que si lo hubiera cambiado por monedas de 2€ o por billetes de 5€ le habría sobrado un euro. También recuerda que tiene más de 300€ y menos de 400€. ¿Cuánto dinero tiene en la hucha?
- 3) Probar que un entero a tiene inverso multiplicativo módulo un entero b si y sólo si $\text{mcd}(a, b) = 1$.
- 4) Calcular, si es posible, el inverso multiplicativo de 121^{301} módulo 250.

Ejercicio 3 (10 puntos).

- 1) Sean $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_7[x]$ e $I = (f(x))$ el ideal generado por $f(x)$. ¿Es el anillo $\mathbb{F}_7[x]/I$ un cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene?
- 2) Dar razonadamente un ejemplo de un cuerpo con 25 elementos.
- 3) Sean $f_1(x) = x^5 + x^4 + 6x + 6$ y $f_2(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ polinomios en $\mathbb{F}_7[x]$. Calcular $\text{mcd}(f_1(x), f_2(x))$, expresarlo como un polinomio mónico. Calcular una identidad de Bézout para estos polinomios.
- 4) Descomponer el polinomio anterior $f_1(x) \in \mathbb{F}_7[x]$ en factores irreducibles.

*“No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje;
y no la posesión, sino el acto de llegar a ella, lo
que concede el mayor disfrute”*

Carl Friedrich Gauss