Álgebra Básica Primera prueba parcial. Grupo E 6-11-2017

APELLIDOS NOMBRE

Instrucciones. Escribir la respuesta a cada cuestión en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por cuestiones. Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.

Ejercicio 1.

1) Dar justificadamente ejemplos de aplicaciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que sean:
   (a) Inyectiva pero no sobreyectiva.
   (b) Sobreyectiva pero no inyectiva.
   (c) Ni inyectiva ni sobreyectiva.
2) Sean X e Y conjuntos, $f\colon X \to Y$ una aplicación y $A, B \subset X$ subconjuntos. Probar que $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.
3) En la situación anterior, probar que si f es inyectiva entonces $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$.
4) Dar un ejemplo de unos conjuntos X e Y, una aplicación $f\colon X \to Y$ y unos subconjuntos $A, B \subset X$ tales que $f(A) \setminus f(B) \subsetneqq f(A \setminus B)$.

Ejercicio 2. En el conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ se define la relación:

$$(a, b)\mathscr{R}(c, d) \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } c = \lambda a,\ d = \lambda b.$$

Se pide:

1) Probar que $\mathscr{R}$ es una relación de equivalencia en X.
2) Probar que $(a, b)\mathscr{R}(c, d)$ si y sólo si $b/a = d/c$.
3) Probar que los conjuntos $X/\mathscr{R}$ y $\mathbb{R}$ son equipotentes. (Indicación: Tomar la aplicación $f\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = y/x$ y usar la factorización canónica de f).

Ejercicio 3. En S_8 consideramos las permutaciones $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$ y $\tau = (1\ 5\ 3\ 7)(2\ 8\ 4\ 6)$. Se pide:

1) Calcular todos los elementos del subgrupo $G = \langle \sigma, \tau \rangle$. (Indicación: hay 8 elementos, obsérvese que $\sigma^2 = \tau^2$ y $\sigma\tau = \tau\sigma^3$).
2) Calcular el orden de cada elemento de G.
3) Comprobar que G sólo contiene subgrupos cíclicos (salvo el propio G).

Ejercicio 4.

1) Enunciar el teorema de Lagrange. Probar que el orden de un elemento de un grupo finito divide al orden del grupo.
2) Probar que todo grupo de orden primo es cíclico.
3) Probar que todo grupo de orden 4 es abeliano.
4) Probar que el menor orden posible de un grupo **no abeliano** es 6.

"Los métodos que he establecido no requieren construcciones ni razonamientos geométricos o mecánicos: sólo operaciones algebraicas, sujetas a una regla de procedimiento regular y uniforme."
Joseph-Louis de Lagrange