Álgebra Básica **Examen de septiembre** **12-09-2018**

APELLIDOS **NOMBRE**

Observaciones:

-) Escribir el nombre y los apellidos en esta hoja, que deberá entregarse con el examen.

-) Este examen consta de 4 ejercicios, en la página 2 están los ejercicios 3 y 4.

-) Escribir la respuesta a cada ejercicio en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por ejercicios.

-) Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.

-) El examen se puntuará sobre 40 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos. Para superar este examen, habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados y un mínimo de 20 puntos en la suma total.

Ejercicio 1 (10 puntos). Se pide lo siguiente:

1. (5 puntos) Sean X e Y conjuntos, $f : X \to Y$ una aplicación, A_1 y A_2 subconjuntos de X y B_1 y B_2 subconjuntos de Y. Decidir si las siguientes igualdades son ciertas (y demostrarlas) o falsas (y dar un contraejemplo):

(1-a) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

(1-b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

2. (3 puntos) Sea G un grupo (notado multiplicativamente). Diremos que un elemento $x \in G$ es **conjugado** con un elemento $y \in G$, que escribiremos $x \sim y$, si existe un elemento $z \in G$ tal que $x = z\,y\,z^{-1}$. Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en G. (Las clases de esta relación de equivalencia se llaman **clases de conjugación**).

3. (2 puntos) ¿Cuántas relaciones de equivalencia hay en un conjunto con 2 elementos? ¿Y en uno con 3 elementos? (Téngase en cuenta la relación que existe entre relaciones de equivalencia y particiones y contéstese razonadamente).

Ejercicio 2 (10 puntos).

1. (3 puntos) Sea G un grupo con 4 elementos, ninguno de los cuales tiene orden 4. Deducir razonadamente:

(1-a) El orden de cada elemento de G.

(1-b) La tabla de multiplicación de G.

2. (3,5 puntos)

(2-a) Sea $\pi \in \mathbb{S}_8$ la permutación cuya descomposición en ciclos es $(134)(27)(58)$. Calcular razonadamente el orden del grupo generado por π.

(2-b) Sea $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Escribir σ como producto de ciclos disjuntos.

(2-c) Calcular una permutación α tal que $\pi = \alpha\sigma\alpha^{-1}$. ¿Es la permutación α obtenida la única posible?

3. (3,5 puntos)

(3-a) Definir subgrupo normal.

(3-b) Demostrar que todo subgrupo normal de un grupo G es necesariamente una unión de clases de conjugación G. (ver el apartado 2 del ejercicio 1)

(3-c) Sea H el subgrupo del grupo simétrico $\mathbb{S}_5$ generado por la permutación (12). ¿Es H un subgrupo normal de $\mathbb{S}_5$?

Observaciones:

-) Escribir el nombre y los apellidos en esta hoja, que deberá entregarse con el examen.
-) Este examen consta de 4 ejercicios, en la página 1 están los ejercicios 1 y 2.
-) Escribir la respuesta a cada ejercicio en hojas separadas. Entregar al final las hojas ordenadas por ejercicios.
-) Durante la realización del examen exclusivamente se podrá disponer de material de escritura. Ningún otro objeto está permitido.
-) El examen se puntuará sobre 40 puntos y cada uno de los ejercicios sobre 10 puntos. Para superar este examen, habrá que alcanzar un mínimo de 3 puntos sobre 10 en cada uno de los ejercicios realizados y un mínimo de 20 puntos en la suma total.

Ejercicio 3 (10 puntos).

1. (2,5 puntos) ¿ Cuál es el menor entero positivo divisible por 7 y que deja resto 1 cuando se divide por cualquier número entero entre 2 y 6, ambos inclusive?

2. (2,5 puntos) Propiedad Cancelativa: Sean x un entero y m un entero positivo. Demostrar que las siguientes propiedades son equivalentes:

(2-a) Para cada par de enteros a y b,

$$ax \equiv bx \mod m \implies a \equiv b \mod m$$

(2-b) Los enteros x y m son primos entre si.

3. (2,5 puntos) ¿Existe algún número de la forma $4k+3$ que se pueda escribir como la suma de dos cuadrados?

4. (2,5 puntos) Demostrar que existen infinitos primos congruentes con 3 módulo 4. *Sugerencia: Asumir que solamente existe un número finito de primos* $\{p_1, p_2, \cdots, p_k\}$ *congruentes con* 3 *módulo* 4*, y analizar razonadamente el número* $n = 4p_1p_2, \cdots p_k - 1$.

Ejercicio 4 (10 puntos).

1. (3 puntos) Sean $f(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ e $I = (f(x))$ el ideal generado por $f(x)$. ¿Es el anillo $\mathbb{F}_2[x]/I$ un cuerpo? ¿Cuántos elementos tiene?

2. (1,5 puntos) Dar razonadamente un ejemplo de un cuerpo con 4 elementos.

3. (3 puntos) Sean $f_1(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 3$ y $f_2(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$ polinomios en $\mathbb{Q}[x]$. Calcular $\mathrm{mcd}(f_1(x), f_2(x))$, expresarlo como un polinomio mónico. Calcular una identidad de Bézout para estos polinomios.

4. (2,5 puntos) Descomponer el polinomio anterior $f_1(x) \in \mathbb{Q}[x]$ en factores irreducibles.