Álgebra Básica A **8 de noviembre de 2017**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Problema 1 *a*) Sean A y B subconjuntos de X. Demostrar razonadamente que

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

b) Decimos que un número *parece-primo* si es compuesto, pero no es divisible ni por 2, ni por 3, ni por 5. Por ejemplo, por primeros tres números que *parecen-primos* son 49, 77, and 91.

Si sabemos que hay 168 números primos menores que 1000. Utiliza el resultado anterior para calcular cuantos naturales menores que 1000 que parecen-primos.

Problema 2 *a*) Dar la definición formal de aplicación, y de aplicación sobreyectiva.

b) Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Decidir si las siguientes proposiciones son ciertas (y demostrarlas) o falsas (y dar un contraejemplo):

1) La aplicación f es sobreyectiva si y solamente si existe una aplicación $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = I_B$.
2) La aplicación f es inyectiva si y solamente si existe una aplicación $h : Y \to X$ tal que $f \circ h = I_B$.

Problema 3 *a*) Sea C un cubo, y sea L el conjunto de sus caras. Explicar por qué cada aplicación $f : L \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ define una manera diferente de marcar los lados del cubo C con los números entre 1 y 6.

b) Sea F el conjunto de las aplicaciones $f : L \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tales que para cada par l_1 y l_2 de caras opuestas de C, se tiene que $f(l_1) + f(l_2) = 7$.

Decimos que la aplicaciones f y g en F están relacionadas, $f \sim g$, si y sólo si existe una permutación $\psi : L \to L$ tal que

$$f \circ \psi = g$$

Demostrar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre el conjunto F.

c) Describir el conjunto cociente $F/\sim$ y calcular su cardinalidad. Describir un conjunto de etiquetas para las clases de equivalencia, lo más natural posible, tal que a cada clase de equivalencia le corresponda exactamente una etiqueta.

d) Demostrar que el conjunto G de las biyecciones ψ definidas en el apartado 2), junto con la operación de composición, tiene estructura de grupo.

Problema 4 *a*) Sean π y σ dos permutaciones en $\mathbb{S}_9$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 4 & 2 & 6 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Calcular la decomposición en ciclos, el orden y el signo de cada una de ellas.

b) Calcular razonadamente el número de permutaciones en $\mathbb{S}_4$ que no dejan ningún elemento fijo.

c) Decidir razonadamente si las siguientes permutaciones son iguales:

$$\sigma = s_5 s_3 s_4$$
$$\pi = s_1 s_1 s_3 s_5 s_2 s_2 s_4 s_3 s_2 s_2 s_1 s_3 s_1 s_2$$
$$\gamma = s_5 s_3 s_4 s_2$$
$$\upsilon = s_5 s_4 s_3 s_2$$