Álgebra Básica B **7 de noviembre de 2017**

APELLIDOS:	NOMBRE:

Problema 1

a) Sean A, B y C subconjuntos de X. Demostrar razonadamente que

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

b) Utilizar este resultado para calcular la cardinalidad del conjunto de los números naturales impares menores o iguales que 10 000, que no son múltiplos de 3.

Problema 2

a) Sean A_1 y A_2 subconjuntos de X, y B_1 y B_2 subconjuntos de Y. Decidir si las siguientes proposiciones son ciertas (y demostrarlas) o falsas (y dar un contraejemplo):

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$$
$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

Problema 3

a) Sea H un cuadrado y V el conjunto de sus vértices.

1) Explicar por qué cada aplicación $f : V \to \{1, 2, 3\}$ define una manera de colorear los vértices de H con los colores 1, 2 y 3.
2) Sea $F_H = \{f : V \to \{1, 2, 3\}\}$ decimos que las aplicaciones f y g están relacionadas, $f \sim g$, si y sólo si existe una permutación $\psi : V \to V$ tal que $f \circ \psi = g$ que satisface que para cada lado $\overline{ab}$ de H, el segmento $\overline{\psi(a)\psi(b)}$ también es un lado de H. Demostrar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre el conjunto F_H.
3) Calcular explícitamente la partición de F_H definida por esta relación de equivalencia. Calcular la cardinalidad de cada una de sus clase de equivalencia.
4) Describir el conjunto cociente $F_H/\sim$ y calcular su cardinalidad. Describir un conjunto de etiquetas para las clases de equivalencia, lo más natural posible, tal que a cada clase de equivalencia le corresponda exactamente una etiqueta.
5) Demostrar que el conjunto G de las biyecciones ψ definidas en el apartado 2), junto con la operación de composición, tiene estructura de grupo.

Problema 4

a) Sean π y σ dos permutaciones en $\mathbb{S}_9$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 3 & 7 & 1 & 5 & 8 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 7 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcular la decomposición en ciclos, el orden y el signo de cada una de ellas.

b) Escribir a π como producto de transposiciones simples $s_i = (i, i + 1)$.

c) Describir todas las posibles estructuras de ciclos de los elementos de $\mathbb{S}_5$. Por ejemplo, la permutación (14)(23)(567) tiene estructura de ciclos $3, 2, 2$, donde el orden en que aparecen los ciclos no es relevante.

Dar la lista completa de los órdenes de los elementos de $\mathbb{S}_5$.