Tema 1: Conjuntos

Miguel Ángel Olalla Acosta
miguelolalla@us.es

Departamento de Álgebra
Universidad de Sevilla

Septiembre de 2017

Contenido

Georg Cantor

Georg Cantor - https://www.youtube.com/watch?v=lL19Edn1QEI

Conjuntos

¿Qué es un conjunto?

Definición (Conjunto)

Llamaremos **conjunto** *a una colección de objetos, distintos entre sí, que comparten una propiedad. Para que un conjunto esté bien definido debe ser posible discernir si un objeto arbitrario está o no en él.*

Conjuntos

Los conjuntos se definen entre llaves citando todos los objetos de los que consta o describiéndolos.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A = \{x \mid x \text{ es un número natural par}\}.$$

Conjuntos

Ejemplo

Uno de los conjuntos más importantes de las Matemáticas es el de los números naturales

$$\mathbb{N} = \{x \mid x \text{ es un número natural}\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Para referirnos al conjunto de los naturales estrictamente positivos utilizaremos la siguiente notación

$$\mathbb{N}_+ = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Otro conjunto igualmente importante es el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{ es un número entero}\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Pertenencia

Definición (Relación de pertenencia)

Los objetos de los que consta un conjunto se denominan **elementos** *del conjunto y decimos que* **pertenecen** *a él. La* **pertenencia** *es la relación fundamental de la Teoría de conjuntos. Si A es un conjunto y a es un elemento que pertenece a A escribiremos*

$$a \in A, \quad \text{que leeremos ``}a\text{ pertenece a }A\text{''.}$$

Si b no pertenece a A escribiremos $b \notin A$.

Ejemplo

-) *si* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *se tiene:* $1 \in A$ *y* $6 \notin A$.

-) *Si* $A = \{x \mid x \text{ es un número natural par}\}$ *se tiene:* $2 \in A$ *y* $3 \notin A$.

Familias de conjuntos

En ocasiones hay que considerar varios conjuntos simultáneamente. En estos casos es frecuente denotar los distintos conjuntos con la misma letra y un subíndice que los diferencia. Por ejemplo:
1) Para cada $i = 0, 1, \ldots, 9$, definimos los conjuntos X_i como

$$X_i = \{\text{Españoles cuyo año de nacimiento termina en } i\}.$$

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \text{ es múltiplo de } n\}.$$

De esta forma se tiene una familia infinita $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos. En particular, si $n = 5$ se tiene

$$A_5 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}.$$

Igualdad de conjuntos

Definición (Igualdad de conjuntos)

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos. O dicho de otra forma, para que dos conjuntos sean distintos es necesario que uno de ellos tenga algún elemento que no pertenezca al otro.
En forma simbólica, dados dos conjuntos A y B se tiene:

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)\,.$$

El conjunto vacío

Definición (El conjunto vacío)

El conjunto que carece de elementos se denomina **conjunto vacío** *y se denota por* $\emptyset$*:*

$$\emptyset = \{\}.$$

Un conjunto con un único elemento se denomina **unitario**.
Notemos que, si $X = \{x\}$ es un conjunto unitario, debemos distinguir entre el conjunto $\{x\}$ y el elemento x:

$$x \neq \{x\}.$$

¿Debemos distingir entre $\emptyset$ y $\{\emptyset\}$?

Subconjunto

Definición (Subconjunto)

Dados dos conjuntos A y B, diremos que A es un **subconjunto** *de B si todo elemento de A es también un elemento de B. Lo notaremos por $A \subset B$, en caso contrario escribiremos $A \not\subset B$.*
En forma simbólica:

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Dos conjuntos son iguales si se verifica que $A \subset B$ y $B \subset A$.

Habitualmente se utiliza la **prueba por doble inclusión** para demostrar que dos conjuntos son iguales.

Subconjunto

Proposición (1.1.2)

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Se tienen las siguientes propiedades:

a) $A \subset A$, $\emptyset \subset A$.

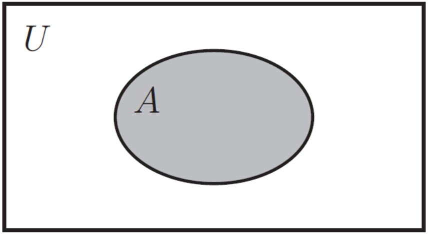
b) *Si* $A \subset B$ *y* $B \subset C$, *entonces* $A \subset C$.

Los subconjuntos de A distintos de $\emptyset$ y de A se denominan **subconjuntos propios** de A.

Conjunto universal

Definición (Conjunto universal)

El conjunto universal o de referencia, que lo notaremos por U, es un conjunto del que son subconjuntos todos los posibles conjuntos que origina el problema que tratamos.

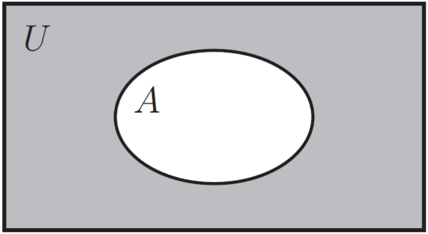


Complementario

Definición (Complementario)

Supongamos que hayamos fijado un conjunto universal U. Dado un conjunto A se define el **complementario** *de A, notado por $\overline{A}$ o A^c, como*

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U, x \notin A\}.$$



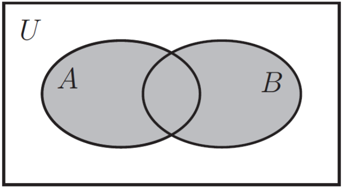
Se dan las siguientes igualdades: $\overline{\emptyset} = U$, $\overline{U} = \emptyset$, $\overline{\overline{A}} = A$.

Unión de conjuntos

Definición (Unión de conjuntos)

Dados dos conjuntos A y B se define la **unión** *de A y B, notado por $A \cup B$, como el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos, A o B, es decir*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$



Unión de conjuntos

De igual forma se define la unión de una familia finita de conjuntos

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

o de una familia arbitraria $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$,

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}.$$

Unión de conjuntos

Proposición (Propiedades de la unión)

La unión de conjuntos verifica las siguientes propiedades, para cualesquiera conjuntos A, B y C:

(a) *Conmutativa:* $A \cup B = B \cup A$.

(b) *Asociativa:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

(c) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

(d) $\emptyset \cup A = A$.

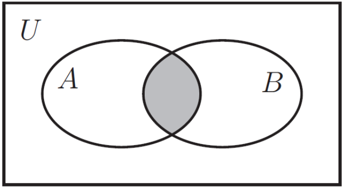
(e) $A \subset B$ *si y sólo si* $A \cup B = B$.

Intersección de conjuntos

Definición (Intersección de conjuntos)

Dados dos conjuntos A y B se define la **intersección** *de A y B, notado por $A \cap B$, como el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a los dos conjuntos, A y B, es decir*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$



Intersección de conjuntos

De igual forma se define la intersección de una familia finita de conjuntos

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

o de una familia arbitraria $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$,

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \forall i \in I\}.$$

Si A y B son dos conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$ se dice que A y B son **disjuntos**.

Intersección de conjuntos

Proposición (Propiedades de la intersección)

La intersección de conjuntos verifica las siguientes propiedades, para cualesquiera conjuntos A, B y C:

(a) *Conmutativa:* $A \cap B = B \cap A$.

(b) *Asociativa:* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(c) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

(d) $\emptyset \cap A = \emptyset$.

(e) $A \subset B$ *si y sólo si* $A \cap B = A$.

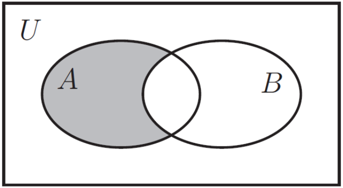
Diferencia de conjuntos

Definición (Diferencia de conjuntos)

Dados dos conjuntos A y B se define la **diferencia** *de A y B, notada por $A \setminus B$, como el conjunto formado por aquellos elementos de A que no pertenecen a B, es decir*

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Si hay un conjunto universal U fijado, entonces $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.



Diferencia simétrica de conjuntos

Definición (Diferencia simétrica de conjuntos)

Dados dos conjuntos A y B se define la **diferencia simétrica** *de A y B, notada por $A \triangle B$, como el conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a uno sólo de los conjuntos A y B, es decir*

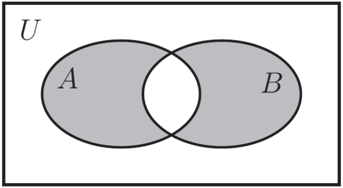
$$A \triangle B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}.$$

Se tiene que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Diferencia simétrica de conjuntos

Si hay un conjunto universal U fijado, entonces

$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$



Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Proposición (1.1.7)

Sean A y B dos conjuntos. Se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$.
2. $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$ *(si $A \subset B$ entonces $A \cup (B \setminus A) = B$).*

Leyes distributivas y de De Morgan

Teorema (Leyes distributivas y de De Morgan)

Dados tres conjuntos A, B y C se verifican las siguientes igualdades:

(a) *Leyes distributivas:*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

(b) *Leyes de* De Morgan*: Supongamos que $A, B \subset C$*

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \; C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B).$$

Fijado un conjunto universal U, tomando $C = U$, la leyes de De Morgan nos dicen que: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Partes de un conjunto

Definición (Partes de un conjunto)

Dado un conjunto X, el **conjunto de las partes** *de X, notado $\mathscr{P}(X)$, es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de X.*
De manera simbólica:

$$A \in \mathscr{P}(X) \Leftrightarrow A \subset X.$$

La consideración del conjunto $\mathscr{P}(X)$ transforma pues la propiedad “ser subconjunto de X” en ser “elemento perteneciente a $\mathscr{P}(X)$”:

Nótese que si $B \subset C$, se tiene $\mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(C)$.

Pares ordenados

Definición (Pares ordenados)

Dados dos objetos x e y, diremos que x (respectivamente y) es la primera (resp. la segunda) componente del **par ordenado** (x, y). *Dos pares ordenados son iguales si y sólo si coinciden sus primeras componentes y coinciden sus segundas componentes:*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = x' \\ \wedge \\ y = y'. \end{array} \right.$$

Producto cartesiano

Definición (Producto cartesiano)

Dados dos conjuntos A y B, se define el **producto cartesiano** *de A y B como el conjunto de pares ordenados formados (por este orden) por un elemento de A y uno de B y se denota*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Producto cartesiano

También se puede definir el producto cartesiano de una **cantidad finita** de conjuntos de la forma natural

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i, \text{ para } i = 1, \ldots, n\}.$$

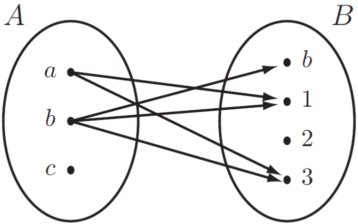
Cuando todos los A_i son iguales a un conjunto dado A notaremos $A^n = A \times \cdots \times A$ (n veces).

Correspondencia

Definición (Correspondencia)

Una **correspondencia** G *de* A *en* B *es un subconjunto del producto* $A \times B$. *Una correspondencia de* A *en* B *se interpreta como una regla que asocia algunos elementos de* A *con algunos elementos de* B. *Concretamente, entendemos que la correspondencia* G *"asocia"* $a \in A$ *con* $b \in B$ *si y sólo si* $(a, b) \in G$.

Correspondencia



$$\{(a,1),(a,3),(b,b),(b,1),(b,3)\}.$$

Aplicación

Definición (Aplicación)

Una **aplicación** f *de* A *en* B *es una correspondencia* $f \subset A \times B$ *donde* *todo* *elemento de* A *tiene asociado un* *único* *elemento de* B*. Esto es, en notación matemática, la correspondencia* f *es una aplicación si y sólo si se verifica que*

$$\forall a \in A \quad \exists! b \in B \quad tal\ que\ (a, b) \in f.$$

Aplicación

Para referirnos a una correspondencia $f \subset A \times B$ que sea una aplicación, es habitual denotarla de la forma $f : A \longrightarrow B$. Además, en este caso, dado un $a \in A$, el único $b \in B$ verificando $(a, b) \in f$ se denotará $f(a)$ y se denominará **imagen** de a (por la aplicación f). A veces también llamaremos a $f(a)$ **valor** de f en a.

De esta notación surge la terminología de llamar a A **conjunto de partida** (o dominio) y a B **conjunto de llegada** de la aplicación f.

Para dar una aplicación debemos indicar:

-) su conjunto de partida,

-) su conjunto de llegada, y

-) la imagen de cada elemento del conjunto de partida, que habrá de ser un único elemento del conjunto de llegada.

Ejemplos

Ejemplo

1) Sea X un conjunto cualquiera. Siempre se tiene la aplicación

$$f : X \to X, \quad \textit{definida por} \quad f(x) = x, \forall x \in X,$$

que llamaremos aplicación **identidad** *y notaremos por* 1_X.

2) Sean X, Y conjuntos cualesquiera e $y_0 \in Y$ un elemento fijo. Siempre se tiene la aplicación

$$g : X \to Y \quad \textit{definida por} \quad g(x) = y_0, \ \forall x \in X,$$

que llamaremos **aplicación constante** *(con valor y_0).*

3) Si X es un subconjunto de Y, $X \subset Y$, siempre disponemos de una aplicación especial $i_X : X \to Y$, definida por $i_X(x) = x$ para cada $x \in X$. Dicha aplicación se denomina la **inclusión** *de X en Y.*

Más ejemplos

Ejemplo

9) Si X e Y son conjuntos, las aplicaciones $p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$ dadas por

$$p(x, y) = x, \quad q(x, y) = y$$

se denominan respectivamente **primera** *y* **segunda proyección**.

Exponenciación de conjuntos

Definición (Exponenciación de conjuntos)

Dados dos conjuntos X *e* Y, *el* **conjunto** Y **elevado a** X, *notado* Y^X, *es por definición el conjunto cuyos elementos son todas las aplicaciones de* X *en* Y:

$$Y^X = \{f : X \to Y \mid \text{ tal que } f \text{ es una aplicación.}\}.$$

Se tiene pues que $Y^X \subset \mathscr{P}(X \times Y)$.

Producto cartesiano de aplicaciones

Definición (Producto cartesiano de aplicaciones)

Dadas dos aplicaciones $f : X \to Y$ *y* $f' : X' \to Y'$, *el* **producto cartesiano** *de* f *y* f' *es la aplicación que denotaremos* $f \times f' : X \times X' \to Y \times Y'$ *definida por*

$$(f \times f')(x, x') = (f(x), f'(x')), \qquad \textit{para cada} \ \ (x, x') \in X \times X'.$$

Imagen

Definición (Imagen)

Dada una aplicación $f : X \to Y$ *y un subconjunto* $A \subset X$*, definimos la* **imagen** *de* A *(o imagen directa de* A*), notada* $f(A)$*, como*

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\} \subset Y,$$

esto es, el conjunto de elementos del conjunto de llegada que son imagen de un elemento de A*. Si* $A = X$ *se denota* $f(X) = \mathrm{Im}(f)$ *y se denomina* **imagen de** f*.*

En general, si $f : X \to Y$ es una aplicación, $f(X) \neq Y$.

Anti-imagen

Definición (Anti-imagen)

Dada una aplicación $f\colon X \to Y$ y un subconjunto $B \subset Y$, definimos la **anti–imagen** *(o contraimagen, o imagen recíproca o imagen inversa) de B, notada $f^{-1}(B)$, como*

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X,$$

esto es, el conjunto de elementos del conjunto de partida cuya imagen pertenece a B.

Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación, se verifica siempre que $f^{-1}(Y) = X$.

Propiedades de la imagen y la anti-imagen

Proposición (1.2.9)

Sean $f : X \to Y$ una aplicación, $A_1, A_2 \subset X$ y $B_1, B_2 \subset Y$. Se verifica:

(a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,
$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

(b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,
$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(c) $f(f^{-1}(B1)) \subset B_1$,
$A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$.

Anti-imagen de un conjunto unitario

Nota (1.2.10)

Sea $f : X \to Y$ una aplicación e $\{y\} \subset Y$ un subconjunto unitario de Y. Con objeto de aligerar la notación, en la mayoría de los textos se escribe $f^{-1}(y)$ en lugar de $f^{-1}(\{y\})$, es decir, la notación $f^{-1}(y)$ se refiere a:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) \in \{y\}\} = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Hemos de tener especial cuidado con esta notación, pues puede confundirse con la imagen de y por la aplicación inversa de f, cuando dicha aplicación inversa exista (ver Nota 1.2.20).

Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Definición (Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas)

Sea una aplicación $f : X \longrightarrow Y$.
(a) f *se dice* **inyectiva** *si dos elementos distintos de* X *siempre tienen imágenes distintas. Dicho de otro modo, si para* $x, x' \in X$ *se tiene*

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

(b) f *se dice* **sobreyectiva (o sobre)** *si todo elemento de* Y *es imagen de algún elemento de* X*. O sea,* f *es sobre si* $f(X) = \mathrm{Im}(f) = Y$*, o dicho de otro modo, si*

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \quad \textit{tal que} \quad f(x) = y.$$

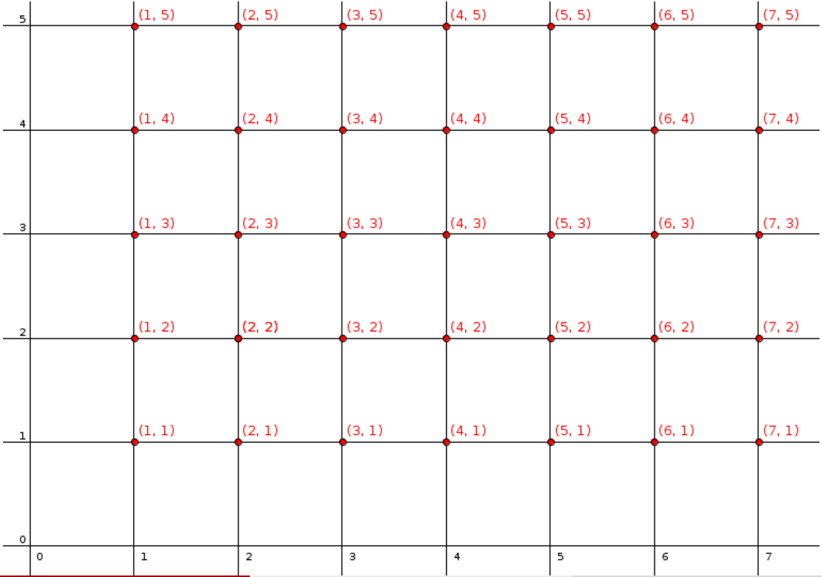
(c) f *se dice* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Proposición (1.2.12)

Sean dos números enteros $m, n \geq 1$. Probar que existe una aplicación biyectiva $f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, mn\}$.

Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas



Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Nota (1.2.13)

En términos de la imagen inversa de conjuntos unitarios tenemos las siguientes equivalencias:

(a) *f es inyectiva si y sólo si para todo $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ consta, a lo más, de un elemento.*

(b) *f es sobre si y sólo si para todo $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ consta, por lo menos, de un elemento (es decir, es no vacío).*

(c) *f es biyectiva si y sólo si para todo $y \in Y$, el conjunto $f^{-1}(\{y\})$ consta, exactamente, de un elemento.*

Sólo en este último caso tiene sentido hablar de aplicación inversa.

Composición de aplicaciones

Definición (Composición de aplicaciones)

Dadas dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ *y* $g : Y \longrightarrow Z$ *se define la* **composición** *de* f *y* g, *notada* $g \circ f : X \longrightarrow Z$, *que será una aplicación de* X *en* Z, *como*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para todo } x \in X.$$

Obviamente $g \circ f : X \to Z$ es una aplicación.
Además la composición de aplicaciones verifica la propiedad **asociativa**:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Aplicaciones invertibles

Definición (Aplicaciones invertibles)

Diremos que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ *es* **invertible** *cuando exista una aplicación* $g : Y \longrightarrow X$ *tal que*

$$g \circ f = 1_X, \quad f \circ g = 1_Y.$$

Aplicación inversa

Proposición (1.2.17)

Si una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es invertible, la aplicación $g : Y \longrightarrow X$ tal que $g \circ f = 1_X$ y $f \circ g = 1_Y$ es única.

A la aplicación g de la proposición anterior se la denomina **aplicación inversa** de f y se denota por $f^{-1} : Y \longrightarrow X$.

Invertible y biyectiva

Proposición (1.2.19)

Sea $f : X \to Y$ una aplicación. Las propiedades siguientes son equivalentes:

(a) *f es invertible.*

(b) *f es biyectiva.*

Imagen inversa vs. aplicación inversa

Nota (1.2.20)

Cuando $f : X \to Y$ es una aplicación, la notación $f^{-1}(?)$ se utiliza para dos situaciones distintas que pueden dar lugar a confusiones de fondo:

i) *Cuando $B \subset Y$, $f^{-1}(B)$ denota la anti-imagen de B por f, que es un <u>subconjunto</u> de X.*

ii) *Cuando f es invertible e $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ indica la imagen de y por la inversa de f, que es un <u>elemento</u> de X.*

Además la notación $f^{-1}(?)$ es también utilizada en una tercera situación que puede confundirse fácilmente con ii) (ver nota 1.2.10).
Es pues fundamental saber en cada caso en qué situación estamos. En ii) estamos suponiendo que f es invertible (o, equivalentemente, biyectiva), mientras que i) tiene sentido para cualquier aplicación f, invertible o no.

Restricción de una aplicación

Definición (Restricción de una aplicación)

Dada una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ y un subconjunto $A \subset X$, se define la restricción de f a A como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f|_A : A & \longrightarrow & Y \\ x \in A & \longmapsto & f|_A(x) := f(x) \in Y \end{array}$$

Esto es, $f|_A$ actúa exactamente como f, pero *sólo sobre los elementos de A*. Nótese que la restricción $f|_A$ coincide con la composición de f con la inclusión $i_A : A \to X$:

$$f|_A = f \circ i_A.$$

Relación

Definición (relación)

Sea A un conjunto. Una **relación** *R definida en A es una correspondencia de A en sí mismo.*

Si el par $(x, y) \in A \times A$ está en R, diremos que x está R–relacionado con y, o que está relacionado con y por R. Esto se notará frecuentemente xRy (nótese que el orden es importante).

Relación

Definición (Algunas propiedades de una relación)

Sea R una relación en un conjunto A. Entonces diremos que R es:

(a) **Reflexiva** *cuando para todo $x \in A$ se tiene que xRx.*

(b) **Simétrica** *cuando xRy siempre implica yRx.*

(c) **Antisimétrica** *cuando, si tenemos xRy e yRx, entonces $x = y$ necesariamente.*

(d) **Transitiva** *cuando, si tenemos xRy e yRz, entonces se tiene xRz.*

Relaciones de orden y de equivalencia

Definición (Relaciones de orden y de equivalencia)

Las relaciones que son reflexivas, simétricas y transitivas se denominan **relaciones de equivalencia**. *Las relaciones que son reflexivas, antisimétricas y transitivas se denominan* **relaciones de orden**.

Clases de equivalencia

Definición (Clases de equivalencia)

Si R es una relación de equivalencia en A, denominamos **clase de equivalencia** *de un elemento $x \in A$, que notaremos simplemente $\overline{x}$ (ó $[x]$) si se sobreentiende R y no hay peligro de confusión, ó $R(x)$ si es necesario precisar a R, al conjunto de todos los elementos de A relacionados con x, esto es,*

$$\overline{x} = [x] = R(x) = \{y \in A \mid xRy\} \, (= \{y \in A \mid yRx\}) \, .$$

Partición de un conjunto

Definición (Partición de un conjunto)

Dado un conjunto $A \neq \emptyset$, una **partición** *de A es un subconjunto $\mathcal{Q} \subset \mathscr{P}(A)$ (los elementos de $\mathcal{Q}$ son subconjuntos de A) que verifica las siguientes propiedades:*

(a) *Todos los elementos de $\mathcal{Q}$ son no vacíos.*

(b) *La unión de todos los elementos de $\mathcal{Q}$ es A.*

(b) *Los elementos de $\mathcal{Q}$ son disjuntos entre sí.*

O expresado simbólicamente,

(a) *$\forall B \in \mathcal{Q}$ se tiene $B \neq \emptyset$ (ó equivalentemente: $\emptyset \notin \mathcal{Q}$).*

(b) *$\bigcup \mathcal{Q} = A$ (ó escrito de otro modo: $\forall a \in A$, $\exists B \in \mathcal{Q}$ tal que $a \in B$)[a].*

(b) *Si $B, C \in \mathcal{Q}$ y $B \neq C$, entonces $B \cap C = \emptyset$.*

---

[a] Nótese que la inclusión $\bigcup \mathcal{Q} \subset A$ siempre se tiene puesto que $\mathcal{Q} \subset \mathscr{P}(A)$.

Clases de equivalencia

Teorema (Las clases de equivalencia como una partición)

Sea A un conjunto y R una relación de equivalencia en A. Entonces el conjunto de las clases de equivalencia de los elementos de A es una partición de A.

Corolario (1.3.4)

Sean A un conjunto y R una relación de equivalencia en A, Sean los elementos $x, y \in A$. Se tiene que las clases de equivalencia de x e y son iguales, $R(x) = R(y)$, si y sólo si xRy.

Conjunto cociente

Definición (Conjunto cociente)

Dada una relación de equivalencia R definida sobre un conjunto A, el conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de A por R se denomina **conjunto cociente** *de A por R. La notación usual es*

$$A/R = \{R(x) \mid x \in A\}.$$

Propiedad universal de la proyección canónica

Proposición (Propiedad universal de la proyección canónica)

Sean X, Y conjuntos no vacíos, R una relación de equivalencia en X y $f\colon X \to Y$ una aplicación. Si se tiene

$$f(a) = f(b) \quad \textit{siempre que} \quad aRb,$$

entonces existe una única aplicación $F\colon X/R \to Y$ tal que $f = F \circ \pi$, es decir el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y. \\ X/R \arrow[ur, dashed, "F"] & \end{tikzcd}$$

Relación asociada a una aplicación

Definición (Relación asociada a una aplicación)

Dada una aplicación $f : X \to Y$, definimos la relación asociada a f de la siguiente forma: para $a, b \in X$

$$aR_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b).$$

Proposición (1.3.7)

La relación R_f asociada a una aplicación es una relación de equivalencia.

Aplicación cociente

La construcción del conjunto cociente por una relación de equivalencia puede verse como un recíproco del proceso anterior: toda relación de equivalencia R es la relación asociada a una cierta aplicación, concretamente a la *aplicación cociente* $\pi\colon X \to X/R$ que a cada $x \in X$ le asocia su clase de equivalencia, $\pi(x) = R(x)$.

Factorización canónica de una aplicación

Teorema (Factorización canónica de una aplicación)

Toda aplicación $f\colon X \to Y$ se descomponer de manera canónica como composición $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/R_f \arrow[r, "\bar{f}"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

donde π es la aplicación cociente, i es la inclusión de $\mathrm{Im}(f)$ en Y y $\bar{f}\colon X/R_f \to \mathrm{Im}(f)$ es la única aplicación que hace conmutativo el diagrama anterior, que viene dada por $\bar{f}(R_f(x)) = f(x)$. Además, la aplicación $\bar{f}$ es biyectiva y por tanto toda aplicación entre dos conjuntos se descompone canónicamente como composición de una aplicación inyectiva, una aplicación biyectiva y una aplicación sobreyectiva.

Conjuntos equipotentes

Definición (Conjuntos equipotentes)

Decimos que dos conjuntos X e Y son **equipotentes** *si existe una aplicación biyectiva $f : X \to Y$.*

Aplicaciones entre subconjuntos de $\mathbb{N}$

Proposición (1.4.1)

Sean dos números enteros $m, n \geq 1$ y sea $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ una aplicación. Se tienen las siguientes propiedades:

1. *Si f es inyectiva, entonces $m \leq n$.*
2. *Si f es sobreyectiva, entonces $m \geq n$.*
3. *Si f es biyectiva, entonces $m = n$.*

Además, si $m = n$, las propiedades siguientes son equivalentes:

(a) *f es inyectiva.*

(b) *f es sobreyectiva.*

(c) *f es biyectiva.*

Aplicaciones entre subconjuntos de $\mathbb{N}$

Proposición (1.4.2)

Sea un número entero $m \geq 1$ *e* $Y \subset \{1, \ldots, m\}$ *un subconjunto no vacío. Entonces existe un entero* $n \geq 1$ *y una aplicación biyectiva* $f : \{1, \ldots, n\} \to Y$*. Además, por la proposición anterior se debe tener* $n \leq m$*.*

Corolario (1.4.3)

Sea un número entero $m \geq 1$*,* $Y \subset \{1, \ldots, m\}$ *y supongamos que existe una aplicación sobreyectiva* $f : Y \to \{1, \ldots, m\}$*. Entonces* $Y = \{1, \ldots, m\}$*.*

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Definición (Conjuntos finitos y conjuntos infinitos)

Decimos que un conjunto X es **finito** *si o bien es vacío, o si no es vacío, existe un número natural $n \geq 1$ tal que X es equipotente a $\{1, 2, \ldots, n\}$.*
Decimos que un conjunto X es infinito, si X es equipotente a algún subconjunto propio de X, i.e. a algún $Y \subset X$ con $\emptyset \neq Y \neq X$.

Proposición (1.4.5)

Sea X un conjunto. Las propiedades siguientes son equivalentes:

(a) *X es un conjunto finito.*

(b) *X no es un conjunto infinito.*

Aplicaciones entre conjuntos finitos e infinitos

Proposición (1.4.6)

Se tienen las siguientes propiedades:

1) *Si X es un conjunto finito y $f : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva, entonces Y también es un conjunto finito.*
2) *Si Y es un conjunto finito y $f : X \to Y$ es una aplicación inyectiva, entonces X también es un conjunto finito.*
3) *Si X es un conjunto infinito y $f : X \to Y$ es una aplicación inyectiva, entonces Y también es un conjunto infinito.*
4) *Si Y es un conjunto infinito y $f : X \to Y$ es una aplicación sobreyectiva, entonces X también es un conjunto infinito.*
5) *El producto cartesiano de dos conjuntos finitos es un conjunto finito.*
6) *X es un conjunto finito si y sólo si $\mathscr{P}(X)$ es un conjunto finito.*
7) *X es un conjunto infinito si y sólo si $\mathscr{P}(X)$ es un conjunto infinito.*

Cardinal de un conjunto finito

Definición (Cardinal de un conjunto finito)

Si X es un conjunto finito, o bien es vacío, en cuyo caso decimos que su **cardinal** *es* 0*, o si no es vacío, existe un entero $n \geq 1$ tal que X es equipotente a $\{1, \ldots, n\}$. De acuerdo con la Proposición 1.4.1, este entero n es único y lo llamaremos* **cardinal** *de X.*
El cardinal de un conjunto finito X se denotará por $\sharp(X)$, o también $|X|$ si no hay peligro de confusión con otras notaciones al uso.

Ningún conjunto X es equipotente a $\mathscr{P}(X)$

Proposición (1.4.8)

Si X es un conjunto cualquiera, no existe ninguna aplicación sobreyectiva $\varphi : X \longrightarrow \mathscr{P}(X)$.

Proposición (1.4.9)

No existe ninguna aplicación sobreyectiva $\varphi : \mathbb{N} \longleftarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.