Preliminares: Lenguaje y Matemáticas. Números complejos

Supondremos que se sabe qué son los números (naturales, enteros, racionales y reales), y que conocemos las propiedades elementales de la suma y el producto de números (asociativa, conmutativa, distributiva,..). La notación que usaremos a lo largo de estas notas será:

- Los números naturales, $\mathbb{N}$.
- Los números enteros, $\mathbb{Z}$.
- Los números racionales, $\mathbb{Q}$.
- Los números reales, $\mathbb{R}$.

El cero, 0, no se considera un número natural

1 Introducción a la lógica proposicional

En este tema trataremos de desarrollar el uso del lenguaje en el contexto de las matemáticas. A lo largo del mismo, por una **proposición** o sentencia lógica entenderemos una declaración que puede ser verdadera o falsa. Por ejemplo:
1) Hoy es lunes.
2) 3 es mayor que 7.
3) He nacido en Sevilla.

En los tres ejemplos es claro (aunque el 3 sea más complicado comprobarlo) que la declaración correspondiente es verdadera o falsa. Ésta es la característica fundamental de las proposiciones. La siguiente declaración (paradoja) “esta frase es falsa" no puede ser ni verdadera ni falsa, por tanto no la consideraremos como proposición.

Otros ejemplos de declaraciones que no son proposiciones son:
1) El color azul es bonito.

2) n es un número par.
3) ¿Quién ha llegado?

Consideremos el conjunto $\mathscr{P}$ de todas la proposiciones posibles. Este conjunto está dividido en dos partes: las proposiciones que son verdaderas y las proposiciones que son falsas. Lo que pretendemos ver ahora es cómo podemos combinar proposiciones para obtener otras nuevas y, además, estudiar cómo se traduce la veracidad o falsedad de las proposiciones combinadas en la proposición resultante. Generalmente usaremos las letras $p, q, r, ...$ para representar las proposiciones. Por ejemplo

$$p : \text{hoy es lunes.}$$

Negación

Dada una proposición p, definimos la proposición $\neg p$ (no p) como la proposición que es falsa cuando p es verdadera, y verdadera si p es falsa.

Esta definición se puede ilustrar en su *tabla de verdad*

p	$\neg p$
V	F
F	V

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q, definimos $p \wedge q$ (p y q) como la proposición que es verdadera sólo cuando ambas, p y q, son verdaderas.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

Dadas dos proposiciones p y q, definimos la proposición $p \vee q$ (p o q) como aquélla que es verdadera cuando una o ambas proposiciones son verdaderas.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicación

Dadas dos proposiciones p y q, definimos la proposición $p \to q$ (p implica q) como la proposición que es falsa cuando p es verdadera y q falsa, y verdadera en los demás casos. Llamaremos a p la hipótesis y a q la conclusión.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ya podemos construir todo tipo de proposiciones, y sus tablas de verdad. Por ejemplo, la tabla de verdad de la proposición $\neg p \vee q$ es

p	q	$\neg p \vee q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Otro ejemplo algo más complicado: la tabla de verdad de $(p \wedge q) \to r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Se observa que las tablas de verdad de la implicación y del primer ejemplo coinciden.

Definición 1.1. Diremos que dos proposiciones son lógicamente equivalentes si tienen la misma tabla de verdad.

Ejemplo 1.2. Los siguientes pares de proposiciones son lógicamente equivalentes:
a) $p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (propiedad distributiva)
b) $p \vee (q \vee r)$, $(p \vee q) \vee r$ (propiedad asociativa)

Tautología

Diremos que una proposición es una tautología si los valores de su tabla de verdad son todos verdaderos.

Por ejemplo $p \vee \neg p$. La negación de una tautología se denomina contradicción. Es decir, una contradicción es una proposición en cuya tabla de verdad sólo aparece el valor falso. Por ejemplo $p \wedge \neg p$.

Definición 1.3. Dadas dos proposiciones p y q definimos la proposición $p \leftrightarrow q$ (p sí y sólo si q) como la proposición que es verdadera cuando p y q son ambas verdaderas ó ambas falsas.

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Con esta definición se puede comprobar que dos proposiciones p y q son lógicamente equivalentes ($\Leftrightarrow$) si la proposición $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Para terminar esta sección veamos cómo actúa la negación sobre $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$. Es un fácil ejercicio comprobar que:
1) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
2) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$.

Estas propiedades se conocen con el nombre de las leyes de DeMorgan. Para ver cómo actúa la negación sobre $\rightarrow$ basta tener en cuenta que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$, y aplicando las leyes de DeMorgan, tenemos que:

$$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg\neg p) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

2 Cuantificadores universales y existenciales

Comenzaremos escribiendo una proposición de distintas formas. Por ejemplo, sabemos (lo probaremos más adelante) que:

la desigualdad $n^2 < 2^n$ es cierta para todos los números naturales mayores o iguales que 5.

Podemos expresar (escribir) esta proposición de distintas formas:

- Para todo número natural n, si $n \geq 5$, entonces $n^2 < 2^n$.
- Para todo n, si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 5$, entonces $n^2 < 2^n$.
- $(\forall n)[(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 5) \rightarrow (n^2 < 2^n)]$.

Cada vez que hemos escrito la proposición, hemos aumentado el grado de formalidad. En la última aparece el símbolo $\forall$ (para todo), que denominaremos “cuantificador universal". Veamos otro ejemplo:

- Todos los elementos del conjunto B son negativos.
- Para todo $x \in B$, $x < 0$.
- $(\forall x \in B)(x < 0)$.
- Para todo x, si $x \in B$, entonces $x < 0$.
- $(\forall x)(x \in B \rightarrow x < 0)$.

La forma más general para una proposición conteniendo en cuantificador universal sería como sigue. Si $P(x)$ es una propiedad expresada en términos de x, entonces una proposición general con el cuantificador universal sería:

$$(\forall x)(P(x)),$$

que leeríamos: para todo x, $P(x)$.

Volvamos al primer ejemplo. Sabemos que la desigualdad $n^2 < 2^n$ es cierta si $n \geq 5$, pero no lo es si $2 \leq n \leq 4$. Es decir, sabemos que

- Existe un número natural n tal que $n^2 \geq 2^n$.
- Existe n tal que $n \in \mathbb{N}$ y $n^2 \geq 2^n$.
- $(\exists n)(n \in \mathbb{N} \wedge n^2 \geq 2^n)$.

El símbolo $\exists$ se lee como "existe" y se denomina cuantificador existencial.

Otro ejemplo:

- Algún elemento del conjunto B es positivo.
- Existe $x \in B$, $x > 0$.
- $(\exists x \in B)(x > 0)$.
- Existe x tal que $x \in B$ y $x > 0$.
- $(\exists x)(x \in B \wedge x > 0)$.

Si $P(x)$ es una propiedad expresada en términos de x, entonces una proposición general con el cuantificador existencial sería:

$$(\exists x)(P(x)),$$

que leeríamos: existe un x tal que $P(x)$.

Veamos un ejemplo con los dos cuantificadores:

- Existe un elemento del conjunto A que es menor que todos los elementos del conjunto B.
- Existe $x \in A$ tal que $x < y$ para todo $y \in B$.
- Existe $x \in A$ tal que, para todo $y \in B$, $x < y$.
- $(\exists x \in A)(\forall y \in B)(x < y)$.

En matemáticas también usamos el símbolo $\exists!$, que significa “existe un único". La expresión $(\exists! x)(P(x))$ se lee: “existe un único x tal que $P(x)$". Por ejemplo: $\exists! n \in \mathbb{N}$ tal que $n^3 = 8$.

Las proposiciones con cuantificadores se niegan siguiendo las dos reglas siguientes:

$$\neg[(\forall x)(P(x))] \Leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$$

$$\neg[(\exists x)(P(x))] \Leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)).$$

Un ejemplo con los dos cuantificadores: la negación de $(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(1/n < \epsilon)$ es $(\exists \epsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(1/n \geq \epsilon)$.

3 Demostraciones

En esta sección veremos los cuatro tipos de demostraciones que usaremos a lo largo de todo el curso.

Prueba directa.

Esquema:

Teorema Si p entonces q.

Demostración: Supongamos p. Entonces [...], se tiene q.

Ejemplo.- Sea n un número natural. Probar que si n es impar entonces n^2 es impar.

Demostración: Si n es impar, es de la forma $n = 2k + 1$. Por tanto $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, es decir, n^2 es impar.

Prueba de una proposición lógicamente equivalente.

Consiste en sustituir la proposición a demostrar por otra que sea lógicamente equivalente y tratar de probar esta última. Por ejemplo, si queremos probar que $p \to (q \vee r)$ podemos usar que es lógicamente equivalente a $(p \wedge \neg q) \to r$.

Esquema:

Teorema $p \to (q \vee r)$.

Demostración: Supongamos $p \wedge \neg q$. Entonces [...], se tiene r.

Prueba del contrarrecíproco.

Es un caso particular de la anterior. Si se quiere probar $p \to q$, usamos que es lógicamente equivalente a $\neg q \to \neg p$, y

Esquema:

Teorema $p \to q$.

Demostración: Supongamos $\neg q$. Entonces [...], se tiene $\neg p$.

Ejemplo.- Sea n un número natural. Probar que si n^2 es impar entonces n es impar.
Demostración: Supongamos que n es par, es decir $n = 2k$. Entonces $n^2 = 4k^2$ es par.
Prueba por reducción al absurdo.
Si queremos probar que p es un teorema (es verdadero), lo que queremos ver es que p es una tautología. Por tanto $\neg p$ es una contradicción.

Esquema:

Teorema p.

Demostración: Supongamos $\neg p$. Entonces [...] FALSO. Luego es una contradicción. Se tiene p.

Ejemplo.- Proposición (Pitágoras).- $\sqrt{2}$ no es racional.
Demostración.- Haremos la demostración por reducción al absurdo. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional, es decir, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, y suponemos que m y n no tienen ningún factor común. Elevando al cuadrado tenemos $2 = m^2/n^2$, luego $m^2 = 2n^2$. Como m^2 es un número par, se deduce (probarlo) que m es par, $m = 2r$. Sustituyendo tenemos $4r^2 = 2n^2$, luego $2r^2 = n^2$, de donde deducimos que n^2, y por tanto n, es un número par. Esto contradice el hecho de que m y n no tenían factores comunes.
Contraejemplos.-
Supongamos que tenemos una proposición y queremos saber si es verdadera o falsa. Por ejemplo, sea $P(n)$ una propiedad que tratamos probar que se verifica para todos los números naturales n. Entonces:

- Si $P(n)$ es verdadera, tenemos que dar una prueba general.
- Si $P(n)$ es falsa, basta dar un valor de n en el que no se verifique la propiedad.

Ejemplo.- Si nuestra propiedad $P(n)$ es: “todo número impar es primo", basta comprobar que para $n = 9$ no se verifica la propiedad, luego es falsa.
Prueba por inducción.-
Supongamos que tratamos de probar una propiedad (un enunciado) sobre los números naturales $n \geq n_0$, para un n_0 dado. Si denotamos por $P(n)$ dicha propiedad, la prueba por inducción funciona de la siguiente manera:

- 1) Probar que $P(n_0)$ es cierta
- 2) Suponer que $P(n)$ es cierta (hipótesis de inducción)
- 3) Probar que $P(n+1)$ es cierta.

El segundo paso se puede sustituir por
2') Suponer que $P(k)$ es cierta $\forall k, n_0 \leq k \leq n$.
Ejemplo.- $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración:
1) El resultado se verifica para $n = 1$, pues $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.
2) Suponemos el resultado cierto para n, es decir, $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
3) Tenemos que probar que $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. En efecto,

$$1+2+\cdots+n+(n+1) = [1+2+\cdots+n]+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Ejemplo.- Todo número natural $n > 1$ tiene un divisor primo.
Demostración:
1) El resultado se verifica para $n = 2$, pues 2 es un divisor primo de 2.
2') Suponemos el resultado cierto $\forall k, n_0 \leq k < n$.
3) Tenemos que probar que n tiene un divisor primo. Si n es primo, n es el divisor buscado. Si n no es primo entonces $n = rs$, con $1 < r, s < n$. Luego r (y s) tiene un divisor primo.

4 Los números complejos

Números complejos

Un **número complejo** es un número de la forma $a + b \cdot i$, donde a y b son números reales e i es un símbolo que verifica la propiedad $i^2 = -1$.

Dado un complejo en forma binómica $z = a + b\,i$, el número real a se denomina **parte real** de z, notado $\mathscr{R}(z)$, mientras que b se denomina **parte imaginaria** de

z, notado $\mathscr{I}(z)$. Dos números complejos son iguales si y sólo si tienen la misma parte real y la misma parte imaginaria.

En $\mathbb{C}$ definimos las siguientes operaciones internas:

$$(a + b\,i) + (c + d\,i) = (a + c) + (b + d)\,i,$$

$$(a + b\,i)(c + d\,i) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i,$$

Proposición 4.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

PRUEBA: Comprobar que $\mathbb{C}$ con estas dos operaciones es un cuerpo es algo tedioso. Simplemente notaremos que el elemento neutro de la suma es $0 = 0 + 0\,i$ y el neutro del producto es $1 = 1 + 0\,i$. Así mismo, dado $a + b\,i$ el inverso aditivo es $-a + (-b)\,i$ y, si es distinto de 0, el inverso multiplicativo es precisamente

$$a/(a^2 + b^2) - (b/(a^2 + b^2))\,i.$$

□

Nota 4.2. Si consideramos los números complejos de la forma $a + 0\,i$ vemos que podemos suponer $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, identificando $a \in \mathbb{R}$ con $a + 0\,i \in \mathbb{C}$.

Definición 4.3. Dado un número complejo $z = a + b\,i$, llamaremos **complejo conjugado** de z, y lo notaremos $\overline{z}$, al número complejo $\overline{z} = a - b\,i$.

La operación de conjugación, a pesar de su inofensivo aspecto, tiene una importancia enorme, incluso en el estudio de objetos reales. Un par de propiedades inmediatas, a partir de la definición, son las siguientes:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

de donde a su vez se deducen

$$\overline{-z} = -\overline{z}, \qquad \overline{1/z} = 1/\overline{z}.$$

Sea $z \in \mathbb{C}$. Es fácil ver que $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si $z = \overline{z}$.

Módulo

Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Llamaremos **módulo** de z, denotado $|z|$, a la raíz cuadrada del número real positivo $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$,

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nota 4.4. La expresión del inverso multiplicativo de z resulta más sencilla usando el conjugado y el módulo:

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\overline{z}} \cdot \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Gráficamente, podemos representar $\mathbb{C}$ como un plano:

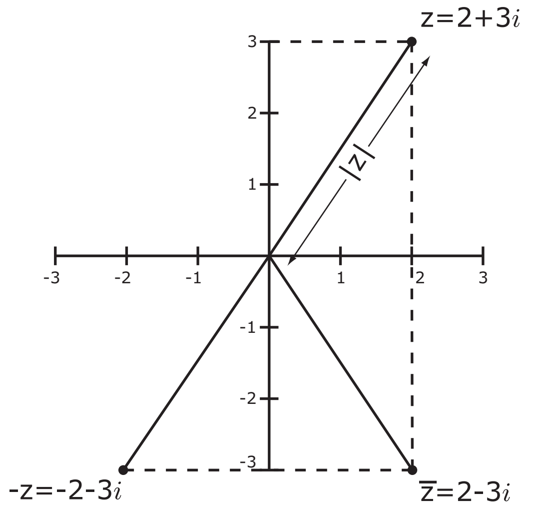

Figura 1: Representación gráfica

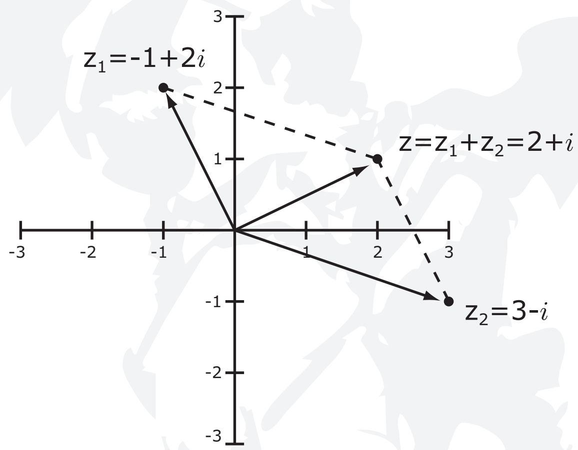

Figura 2: Suma de complejos

Forma polar o módulo-argumento Todo número complejo z se puede escribir de forma

$$z = |z|(a + b\, i),$$

donde $a^2+b^2=1$ y, en consecuencia, existe un único ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, llamado **argumento** de z, tal que

$$z = |z|(\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha)\, i).$$

Dos números complejos, representados en forma polar, son iguales si y sólo si sus módulos y sus argumentos son iguales.

Con esta notación es fácil ver que para multiplicar dos números complejos hay que multiplicar sus módulos y sumar sus argumentos. Para dividir, por tanto, se dividen sus módulos y se restan sus argumentos. En efecto: sean

$$z_1 = r_1(\cos(\alpha_1) + i\operatorname{sen}(\alpha_1)), \qquad z_2 = r_2(\cos(\alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_2)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \cdot [(\cos(\alpha_1) + i\operatorname{sen}(\alpha_1))(\cos(\alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_2)] \\ &= r_1 r_2 \cdot [\,(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2)) + \\ &\qquad\qquad (\cos(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) + \cos(\alpha_2)\operatorname{sen}(\alpha_1))\, i\,] \\ &= r_1 r_2 \cdot [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)]\,. \end{aligned}$$

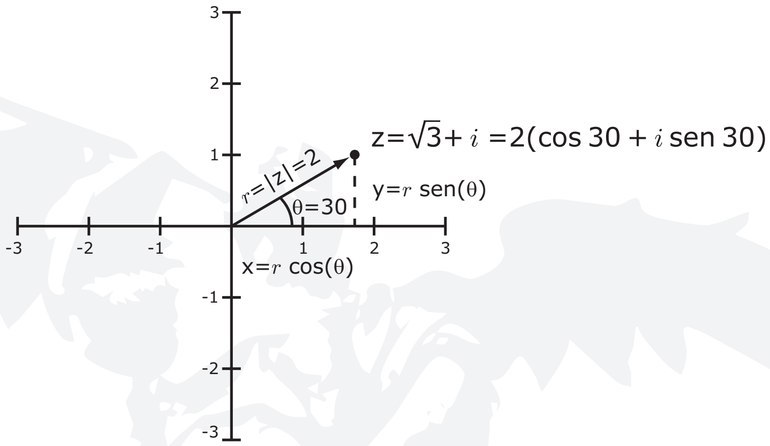

Figura 3: Forma polar

De aquí se obtiene la **fórmula de De Moivre**:

Fórmula de De Moivre

Para todo número entero n, se tiene

$$(\cos(\alpha) + i\operatorname{sen}(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\operatorname{sen}(n\alpha).$$

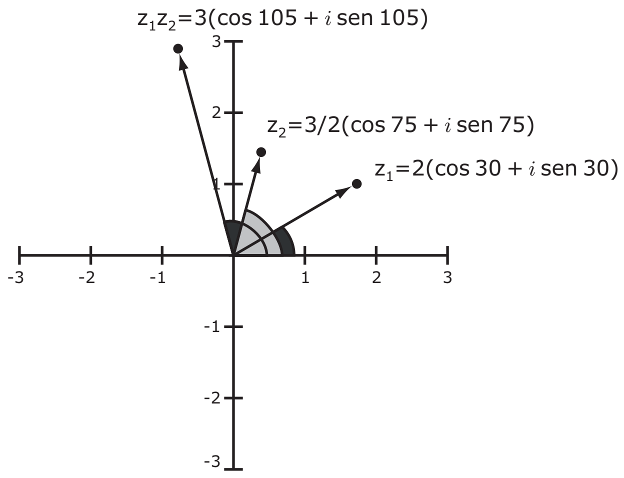

Figura 4: Producto

PRUEBA: Si $n \geq 0$ lo probaremos por inducción. Para $n = 0$ se verifica, pues

$$(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^0 = 1 = \cos(0) + i\text{sen}(0).$$

Supongamos que se verifica para n, es decir,

$$(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^n = \cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha).$$

Entonces,

$$(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^{n+1} = (\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^n(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha)) =$$

$$= (\cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha)(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha)) = \cos(n+1)\alpha + i\text{sen}(n+1)\alpha.$$

Sea ahora $n < 0$. Pongamos $n = -m$. Entonces,

$$(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^n = (\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^{-m} = \frac{1}{(\cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha))^m} =$$

$$= \frac{1}{(\cos(m\alpha) + i\text{sen}(m\alpha)} = \cos(m\alpha) - i\text{sen}(m\alpha) = \cos(-m)\alpha + i\text{sen}(-m)\alpha = \cos(n\alpha) + i\text{sen}(n\alpha).$$

□

Forma exponencial Una variante de la forma polar se obtiene al tener en cuenta la fórmula de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\text{sen}(\alpha).$$

Esto nos permite escribir un número complejo en la forma siguiente, denominada forma exponencial:

$$z = |z|e^{i\alpha}.$$

Esta nueva forma es especialmente cómoda para expresar productos y cocientes ya que sólo hay que tener en cuenta las propiedades de la función exponencial (para multiplicar se suman exponentes y para dividir se restan). En particular, para potencias con exponentes enteros se tiene

$$z^n = |z|^n e^{in\alpha}.$$

Raíces n-ésimas de un número complejo Estudiemos ahora las potencias con exponente racional de un número complejo. Sean $z = |z|e^{i\alpha} \in \mathbb{C}$ y n un número natural. Consideremos $\omega = |\omega|e^{i\beta} = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ una raíz n-ésima de z. Se tiene que

$$\omega^n = |\omega|^n e^{in\beta} = |z|e^{i\alpha} = z.$$

Por tanto,

$$|\omega| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{y} \quad \beta = (\alpha + 2k\pi)/n, \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

De todos estos valores sólo n consecutivos son distintos. Por tanto, un número complejo z tiene siempre n raíces n-ésimas distintas

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\alpha+2k\pi)/n}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Observamos que las n raíces n-ésimas tienen todas el mismo módulo, y sus argumentos se diferencian en $2\pi/n$ cada uno del siguiente, esto es, las raíces n-ésimas se encuentran en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de centro 0 y radio $\sqrt[n]{|z|}$. Como ejemplo, en la siguiente figura podemos ver las raíces sextas de $z = 8(\cos 30 + i \operatorname{sen} 30)$

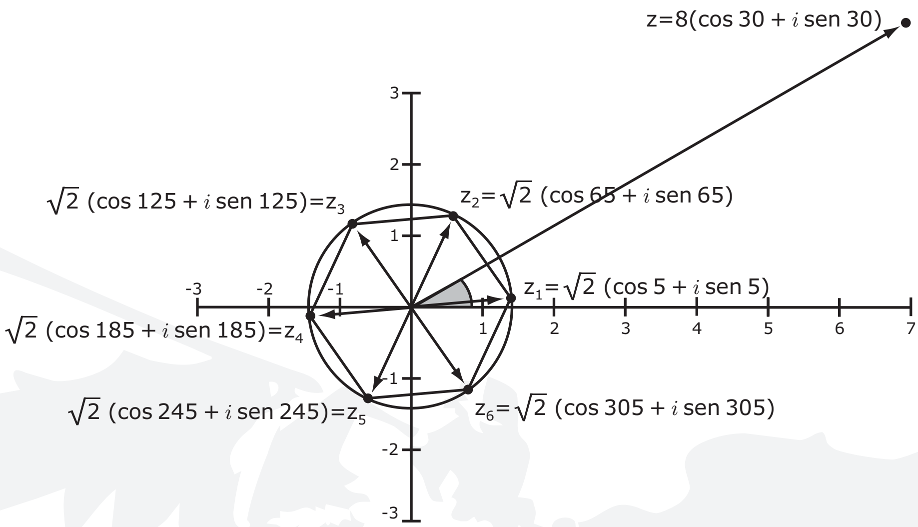

Figura 5: Raíces